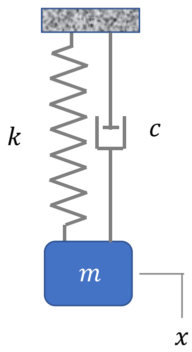
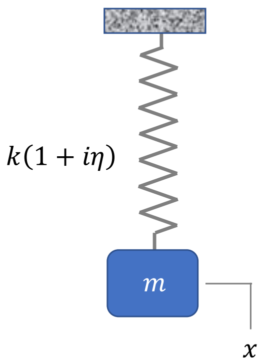
減衰は振動問題を考える際に非常に重要な現象である。減衰とは機械的エネルギーの散逸（通常は熱に変換される）で、種類としては、材料減衰（内部摩擦、機械的ヒステリシス）、接合部の摩擦、材料表面に高減衰材を付加した場合油圧ダンパ（ショックアブソーバ、ハイドロマウント）、空気／油によるポンキング効果（スクイーズフィルムダンピング）、衝撃（通常は高周波振動に変換されて散逸）音響放射（振動エネルギは音に変換）、振動放射（振動が周りの構造、流体に伝搬）など多岐に渡る。ここでは、減衰の主要な 3 形態である粘性減衰（Viscous）、ヒステリシス減衰(Hysteretic)、摩擦減衰（Coulomb）について説明する。図 1 にこの 3 種類の減衰の機構のモデル図と運動方程式を示す。図 1(a)は粘性減衰で今まで紹介した減衰はすべてこのタイプで、速度比例型の減衰力を有する。図 1(b)はヒステリシス減衰で、材料自体の減衰特性η（英語で loss factor、日本語で損失係数と呼ぶ）により定義され、その減衰力は変位に比例する。損失係数は縦弾性係数（ヤング率）Eと同様に材料固有の値となる。図 1(c)は摩擦減衰で物体間（ここではマスとこれに接する物体）の摩擦による力で、摩擦係数と物体間に作用する力に減衰力は比例する。



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

慣性力　減衰力　弾性力

図 1(a)　粘性減衰



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k(1+i\eta)x=0$$

慣性力　弾性力 + 減衰力

図 1(b)　ヒステリシス減衰

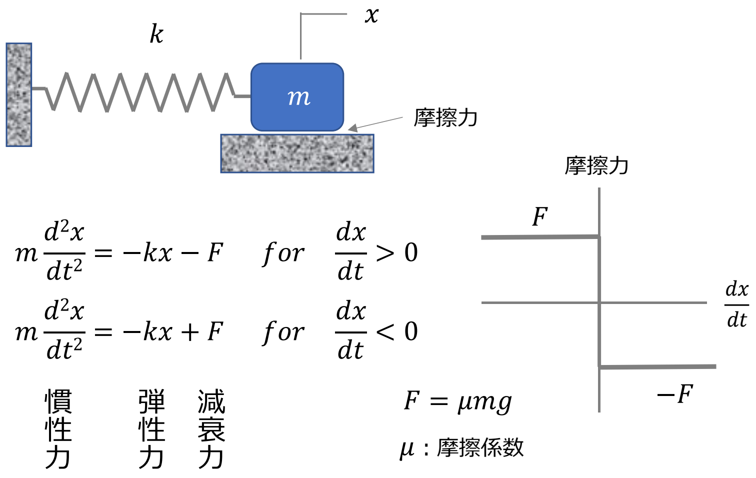


図 1(c) 摩擦減衰

次に、上述の 3 種類の減衰機構を有する振動系を Modelica で直接解く方法について考える。粘性減衰は次式で表現できる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (1)$$

また、ヒステリシス減衰を含む振動系は次式で表現できる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(1 + i\eta)x = 0 \qquad (2)$$

しかしながら、この式は係数に複素数を含んでおり、Modelica では解くことができない。そこで、直接理論的に解いて見る。式（2）の解を $x(t) = e^{pt}$ と置くと

$$mp^2 + k(1 + i\eta) = 0$$

これを p について解くと（ηが微小として）

$$p = i\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 + i\eta} = i\omega_0\left(1 + \frac{1}{2}i\eta\right) = i\omega_0 - \frac{1}{2}\eta\omega_0 \qquad (3)$$

ここにω_0は系の固有振動数で$(k/m)^{1/2}$である。上記の最後の式の第 1 項が振動項、第 2 項が減衰項である。同様の検討を粘性減衰について実施すると式（3）に相当する解が

$$p = i\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} - \zeta\omega_0 \qquad (4)$$

と求まる。式（3）と（4）を比較することにより、ヒステリシス減衰は Modelica で直接解くことはできないものの、粘性減衰の各定数に置き換えることにより便宜的に解くことができる。ここで重要なことは粘性減衰の固有振動数は減衰比ζ（$=c/(2m\omega_0)$）の影響を受けるが、ヒステリシス減衰の固有振動数は減衰がない場合の固有振動数ω_0と同じである。

一方、摩擦減衰は図 1(c)の運動方程式で表現され、Modelica で直接表現すると図 2 となる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - F \quad for \quad \frac{dx}{dt} > 0 \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F \quad for \quad \frac{dx}{dt} < 0$$

```
model dampFriction
 SI.Position x(start=1.0);
 SI.Velocity v(start=0.0);
 SI.Acceleration a;
 SI.Force force;
 import Modelica.Constants.g_n;
 import SI = Modelica.SIunits;
 parameter Modelica.SIunits.Mass m=1.0;
 parameter Modelica.SIunits.TranslationalSpringConstant
k=100.0;
 parameter Real fm=0.5;
equation
 v=der(x);
 a=der(v);
 m*a + k*x = force;
 if v>0 then
  force = -fm*m*g_n;
  else
  force = fm*m*g_n;
 end if;
end dampFriction;
```

図 2　摩擦減衰を含む振動系を表現した Modelica スクリプト

しかし、この定義では、速度 v の符号が反転する瞬間、シミュレーションがハンチングして計算エラーとなる。これは、数値積分によって、わずかでも速度 v の符号が変わると、状態切替が起こって、解くべき連立方程式が変わり、次の計算時刻では、また v の符号が変わり、これを永遠に繰り返すためである。この問題を解くためには、状態遷移図を考え、各状態で解くべき連立方程式と、それらの状態間の遷移条件を両方定義する必要がある。ここでは詳細は省くが摩擦モデルの状態遷移を考慮して図 2 の Modelica 表現を修正すると図 3 のように解くことが可能となる。

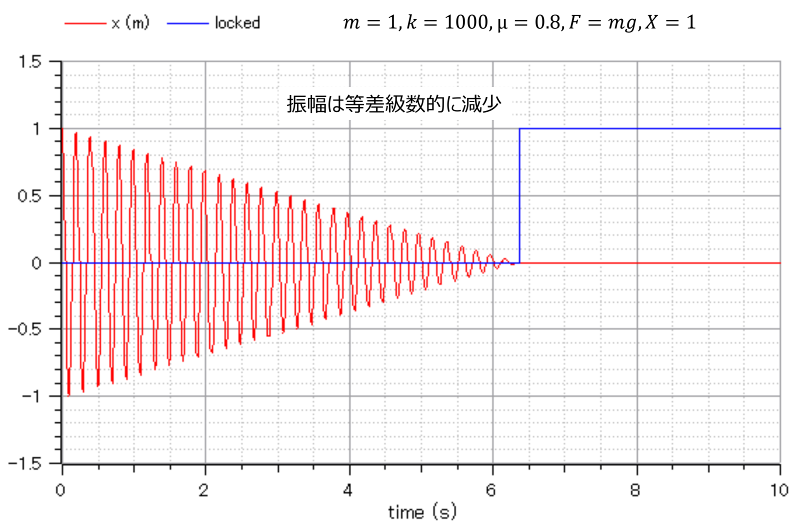


図 3　摩擦モデルの状態遷移を考慮して解いた結果例

一方、粘性減衰、ヒステリシス減衰の場合の応答の減衰波形は図 4 のようになる。

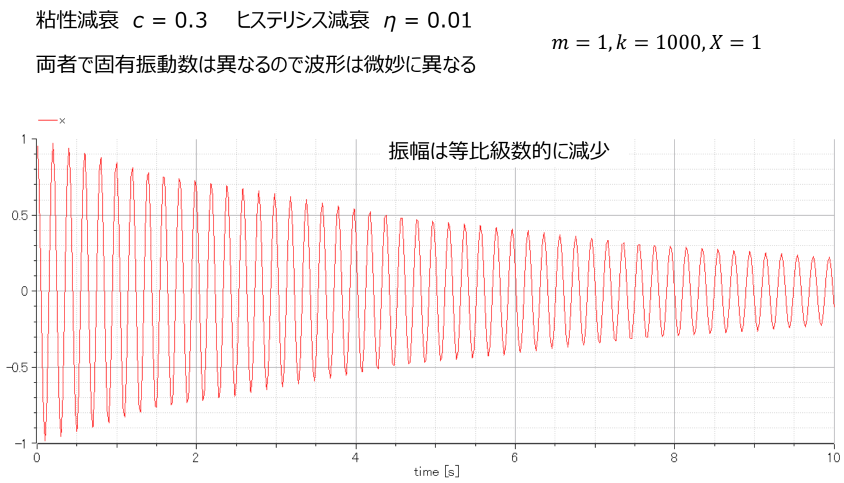


図 4 粘性減衰、ヒステリシス減衰の場合の減衰波形

図 3 の摩擦減衰と、図 4 の粘性減衰、ヒステリシス減衰を比較して大きく異なる点は、ヒステリシス減衰は等差級数（直線）的に減衰、粘性減衰、ヒステリシス減衰は等比級数（指数関数）的に減衰することである。粘性減衰、ヒステリシス減衰は等比級数（指数関数）的に減衰するのは方程式から理解できるが、まぜ、ヒステリシス減衰は等差級数（直線）的に減衰するのかを理論的に考えて見る。

図 1(c)の運動方程式を次式のように書き換える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2(x + a) = 0 \qquad for \qquad \frac{dx}{dt} > 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2(x - a) = 0 \qquad for \qquad \frac{dx}{dt} < 0$$

ここに、$p^2 = k/m$、 $a = \frac{F}{k}$ でaは力 F による静的な変位である。質量 mをx_0だけ右に引張り、放すと質量は左にすべり、この時、$\frac{dx}{dt} < 0$ で $\frac{d^2x}{dt^2} + p^2(x - a) = 0$ ここに$\xi = x - a$と置くと

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + p^2 \quad \xi = 0$$

この解は

$$\xi = x - a = Acospt + Bsinpt$$

初期条件(t=0)は$x = x_0$, $\frac{dx}{dt}$=0 なので

$$x = a + (x_0 - a)\,cospt$$

すなわち、質量mは$x = a$ を中心に、振幅$(x_0 - a)$の調和振動を行い、質量が左向きに動いている

間、0<pt<π においてこれは成立するが、pt=π で左方向の運動を中止、このときの位置x_1は下記となる。

$$x_1 = -(x_0 - 2a)$$

次に、質量 mは右方向に動き、$\frac{dx}{dt} > 0$ で $\frac{d^2x}{dt^2} + p^2(x + a) = 0$ ここに $\xi = x + a$ と置くと

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + p^2 \xi = 0$$

この解は

$$\xi = x + a = C cospt + D sinpt$$

質量 mは pt=π において $x = x_1$, $\frac{dx}{dt}$=0 なので

$$x = -a + (x_0 - 3a) \, cospt \qquad \pi<pt<2\pi$$

すなわち、質量mは$x = -a$ を中心に、振幅$(x_0 - 3a)$の調和振動を行い、質量が右向きに動いてい

る間、π<pt<2π においてこれは成立するが、pt=2π で右方向の運動を中止、このときの位置x_2は下記と

なる。

$$x_2 = x_0 - 4a$$

以降同様に運動を続ける すなわち、振幅は半周期ごとに$2a$づつ減少して行くが、周期は摩擦に影響されない。すなわち、図 5 のように直線的（等差級数的）に振幅は減少、ばね力kxが摩擦力Fより小さくなった時点で質量mは停止する。

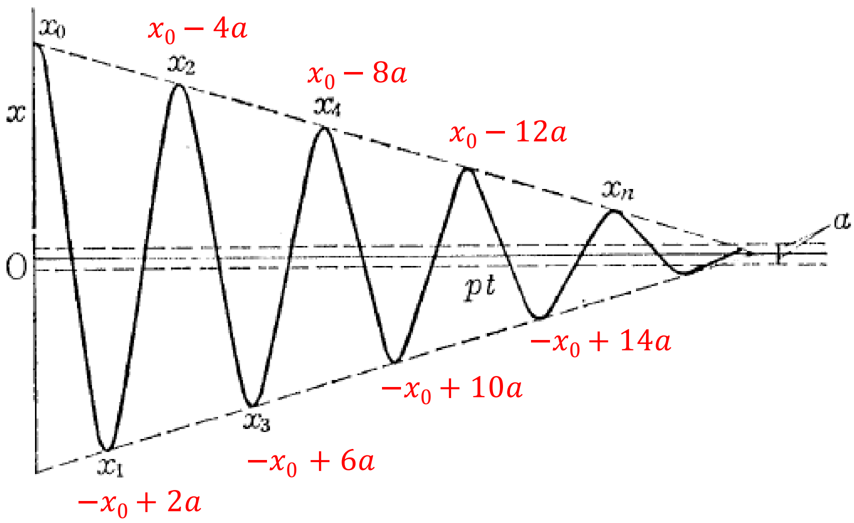


図 5 摩擦減衰の減衰波形の理論解