通常の振動系はばねの復元力が変位の一次関数で表現される線形振動系である。

$$m\ \frac{d^2x}{dt^2}\ + kx = 0 \tag{1}$$

この場合は解を解析的に求めることができ、解の重ね合わせができる。一方、実際のばねを考えた場合、変位を増やしていくとばねが硬くなったり、柔かくなったりする場合がある。この場合には、ばねの復元力は変位の一次関数で表現することができず、

$$m\ \frac{d^2x}{dt^2}\ + f(x) = 0 \tag{2}$$

の形式で表現される。式(2)で表現される振動系を非線形振動と言い、一般には解析的に解くことができず、種々の近似解法を適用することになる。最初に紹介した微小振幅ではない振り子の振動も非線形振動の一種である。

ここで、非線形振動の例として図 1 の振動系を考える。この時の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx + bx^3 = 0 \tag{3}$$

となる。式(3)を直接、Modelica で表現すると図 2 となる。

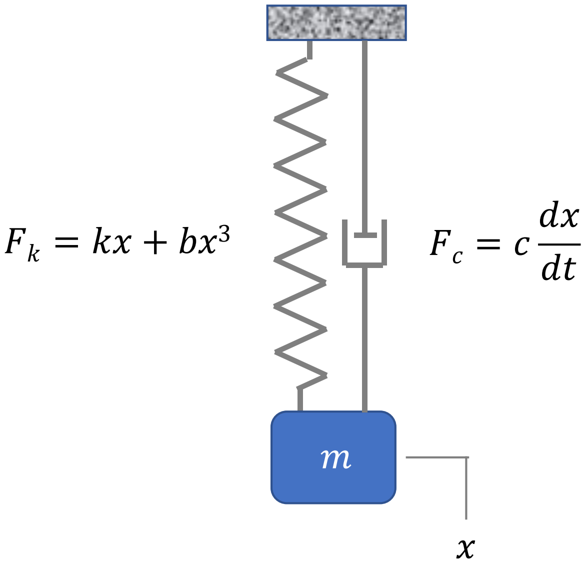


図 1　非線形振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx + bx^3 = 0$$

```
model nonlinear2
 Real x(start=1.0);
 Real v(start=0.0);
 Real a;
 parameter Real m=1.0;
 parameter Real c=0.1;
 parameter Real k=1.0;
 parameter Real b=0.5;

equation
 v=der(x);
 a=der(v);
 m*a + c*v + k*x + b*x^3 = 0;
end nonlinear2;
```

変数（3個）

パラメータ

連立方程式（3式）

図 2　非線形振動モデルを表現した Modelica スクリプト

図 2 の計算例を初期振幅が小さい場合に関して図 3 に示す。図 2 の式で b を-0.5，0，0.5 と 3 種類に振った場合の結果である。図中の↔は線形振動の場合の周期を示す。これから、少しわかりにくいが、b が負の場合は振幅が大きいところで周期が長く、b が正の場合には振幅が大きいところで周期が短いことが分かる。b がゼロの場合は当然のことながら振幅に関わらず周期はどこでも同じである。このように b が正の場合には振幅が大きいときにばね定数が大きくなるのでハードタイプのばね、逆に、b が負の場合には振幅が大きいときにばね定数が小さくなるのでソフトタイプのばねと呼ぶ。

図 10 に、初期振幅を図 9 の 10 倍にした場合の計算結果を示す。b=0.5（ハードタイプのばね）の場合の周期の振幅依存性が図 9 より明確に表れている。

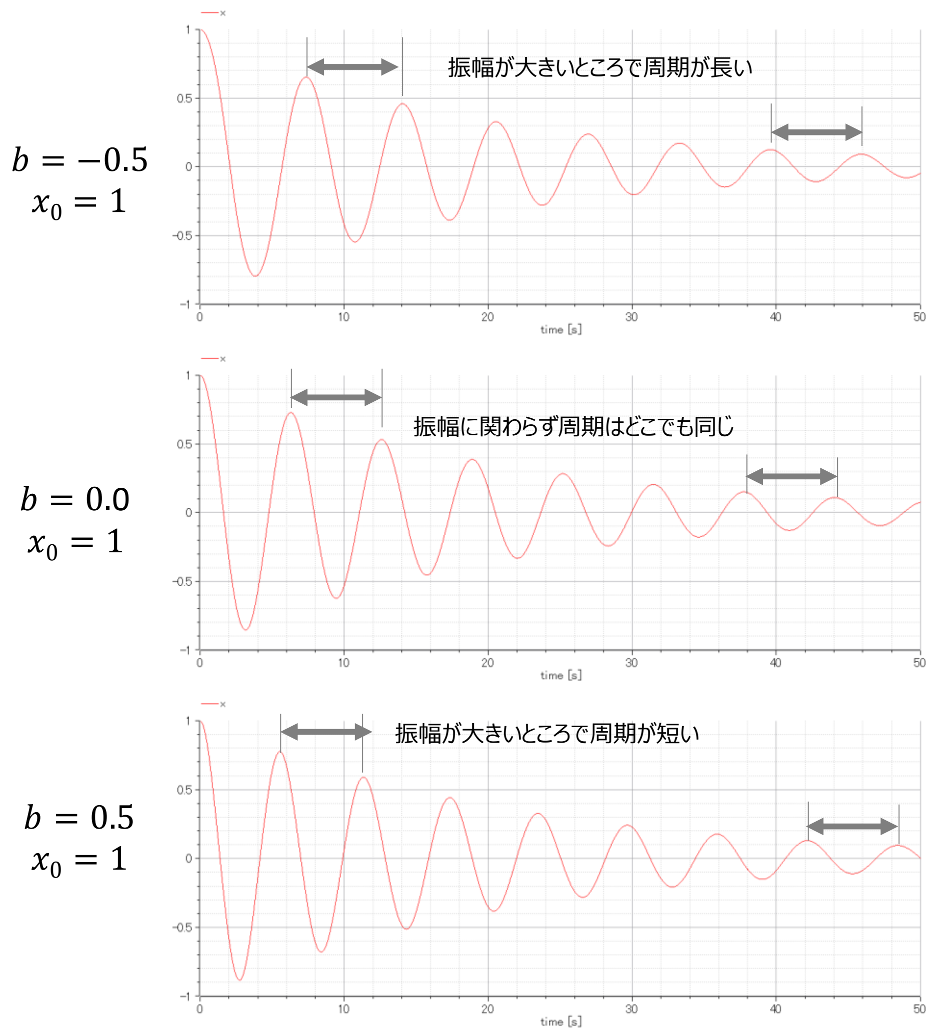
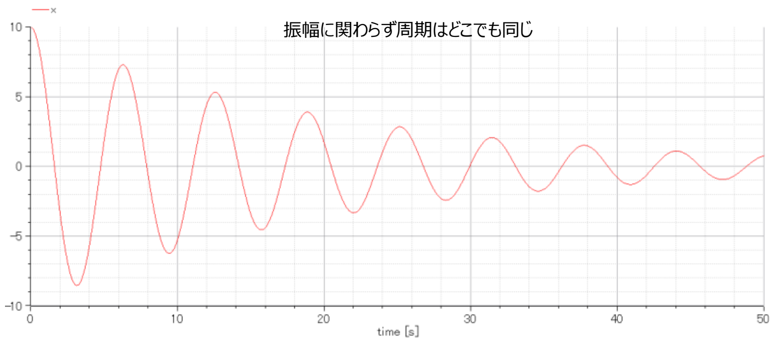


図３　図２の計算例（初期振幅が小さい場合）

$b = 0.0$
$x_0 = 10$



$b = 0.5$
$x_0 = 10$

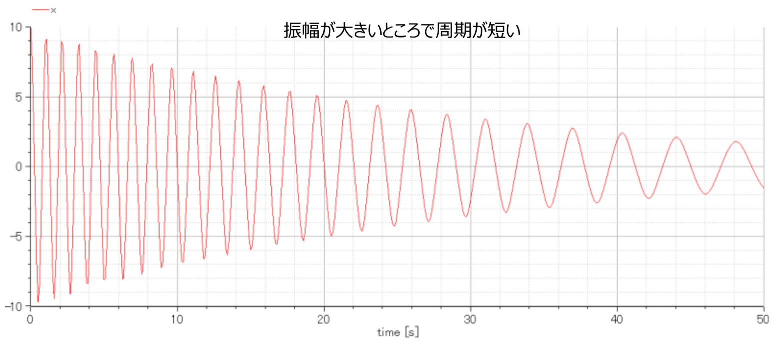


図４　図３の計算例（初期振幅が大きい場合）

一方、振り子の振動は大振幅を考慮すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^{\ 2}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

となるので、ソフトタイプのばね（復元力）と考えることができる。さらに言うならば振り子の元々の式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

であるので、これを Modelica では直接表現することができ、図５となる。この計算結果を図６に示す。計算結果が示すように初期角度が大きい場合は周期が長くなっており、このことからも振り子のばね（復元力）はソフトタイプであることが分かる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

```
model Pendulum
 Real xt(start=0.1);
 Real vt(start=0.0);
 Real at;
 parameter Real g=9.81;
 parameter Real L=1.0;
equation
 vt=der(xt);
 at=der(vt);
 at + (g/L)*sin(xt) = 0;
end Pendulum;
```

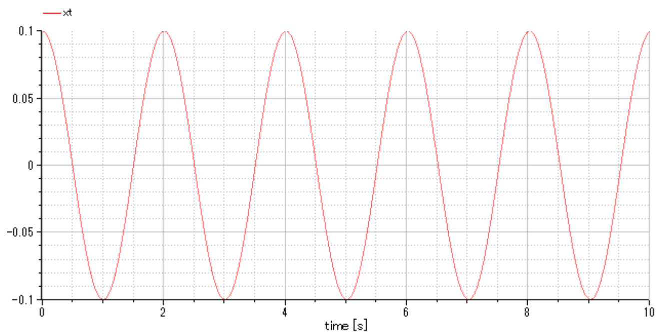
変数（3個）

パラメータ

連立方程式（3式）

図 5　振り子振動モデルを表現した Modelica スクリプト

$\theta_{initial} = 0.1$



$\theta_{initial} = 1.5$

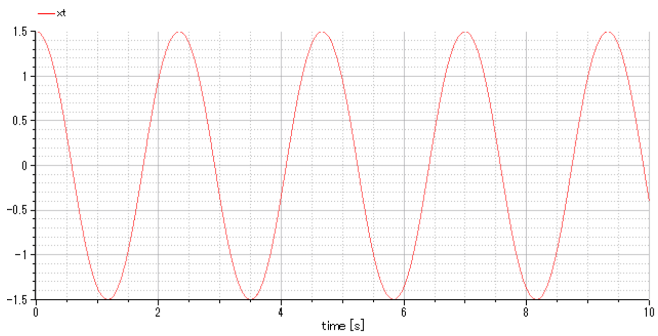


図 6　図 5 の計算例