

振動的な外力があるときに系は振動する。強制振動がその例である、一方、振動的でない外力、動きが存在しても振動的挙動を示す場合がある。これが自励振動である。図 1 に自励振動の発生の可能性のある摩擦振動モデルを示す。

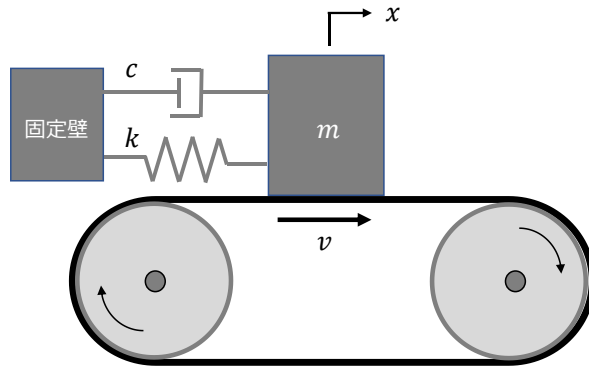


図 1 自励振動モデル

一定速度 v で動くベルトの上に、ブロック状の質量が載っている。質量はばねと減衰機構により固定壁と繋がっている。ブロックとベルトの接触面では摩擦力が働くので、その静止摩擦係数を μ_0 とする。一方、ブロックとベルトが滑っているときにも動摩擦が作用する。動摩擦係数を μ とし、 $\mu = \mu_0 - bu$ とする。ここに、 u はブロックとベルトの相対速度である。これより、ブロックの運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} - mg\{\mu_0 - b(\frac{dx}{dt} - v)\} \quad (1)$$

これを整理すると

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (c - mg) \frac{dx}{dt} + kx = -mg\mu_0 + mgbv \quad (2)$$

となる。この式の右辺は定数なので $X = x - mg(bv - \mu_0)/k$ として原点をずらすと

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \left(\frac{c - mgb}{m}\right) \frac{dX}{dt} + \frac{k}{m} X = 0 \quad (3)$$

と変換できる。この式は減衰振動の式と同じ形式である。従って、 $c - mgb > 0$ の時、振動は減衰、 $c - mgb < 0$ の時、振動は大きくなる。

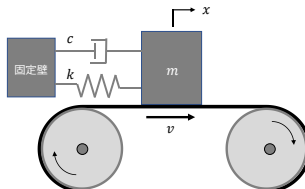
ここでブロックの質量を変えてみる。質量が小さいときには、 $c - mgb > 0$ なので、質量は減衰振動し、 $X = 0$ 、すなわち、 $x = mg(bv - \mu_0)/k$ の一定値に近づいて静止する。すなわち、ベルトからの摩擦力とばねからの力が釣り合って一定の位置を保つ。一方、質量が重い場合には、 $c - mgb < 0$ となり、式(13)から分かるように、減衰振動しないで、質量はベルトによって右に移動させられたのち、ばねによって引き戻され、再度、ベルトで右に移動させられ、といった周期的な動作を繰り返しながら、(理論上) 発散していく。この時の周期的振動の角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c - mgb}{2m}\right)^2} \quad (4)$$

となる。 $c=mgb$ の時は、式(3)から、単振動の非減衰振動をすることが分かる。

以上は自励振動を解析的に解いて評価した例である。同様に、式(11)を直接、Modelica で表現すると図 2 となる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} - mg\{\mu_0 - b(\frac{dx}{dt} - v)\}$$



```

model stickslip
  Real x(start = 1.0);
  Real v(start = 0.0);
  Real a;
  parameter Real m = 1.0;
  parameter Real k = 1.0;
  parameter Real c = 9.81;
  parameter Real g = 9.81;
  parameter Real b = 1.0;
  parameter Real myu0 = 0.8;
  parameter Real v0 = 1.0;

  equation
    v = der(x) ;
    a = der(v) ;
    m*a = -k*x - c*v - m*g* ( myu0 - b* ( v - v0 ) );
end stickslip;

```

変数 (3個)

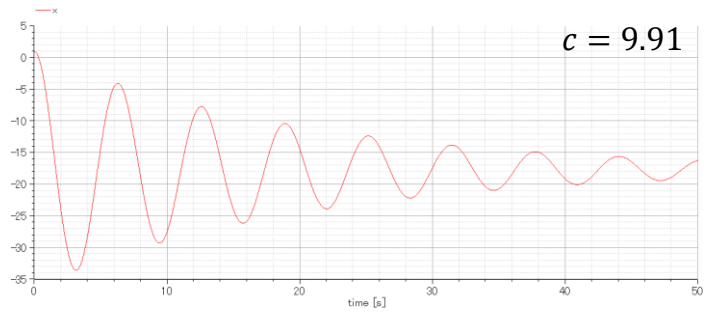
パラメータ

連立方程式 (3式)

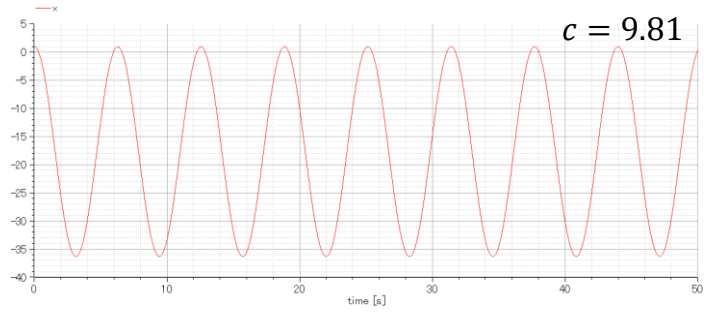
図 2 自励振動モデルを表現した Modelica スクリプト

図 2 を種々のパラメータの下で計算した結果を図 3 に示す。ここでは、減衰定数を 9.91、9.81、9.71 と 3 種類に変えて計算した。これらは前述の解析的に解いて場合の減衰振動、非減衰振動、発散振動に相当する。

$$c - mgb > 0$$



$$c = mgb$$



$$c - mgb < 0$$

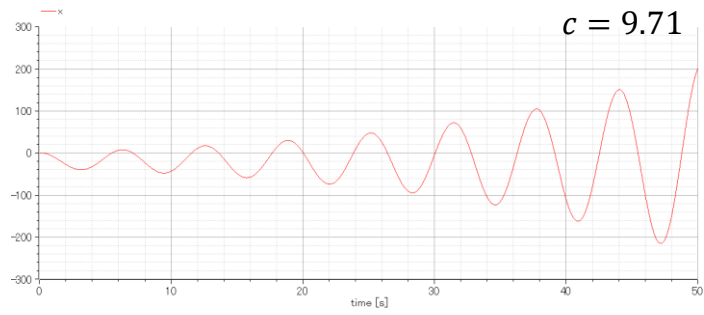


図3 図2の計算例