振動と言う現象を理解するために、多岐に渡る振動を、分類した例を表 1 に示す。現象として、自由振動、強制振動、過渡振動、自励振動、対象として、1 自由度系（単振動）、多自由度系(連成振動)、無限自由度系（連続体の振動）等に分類される。また、減衰振動／非減衰振動、線形振動／非線形振動と言った分類もある。

表 1　振動の分類

自由振動（固有振動）	１自由度系（単振動）、多自由度系（連成振動） 無限自由度系（連続体）：軸、弦、梁、膜、板 減衰／非減衰、線形／非線形
強制振動	１自由度系（単振動）、多自由度系（連成振動） 無限自由度系（連続体）：軸、弦、梁、膜、板 減衰／非減衰：粘性減衰、固体摩擦減衰、ダイナミックダンパ
過渡振動	１自由度系（単振動）、多自由度系（連成振動） 無限自由度系（連続体）：軸、弦、梁、膜、板 減衰／非減衰、線形／非線形
自励振動	摩擦起因、マシュー型 機械運動起因 流体起因（流体関連振動）
振動源	往復振動（エンジン） 回転振動（モータ） 不規則振動

表 1 の現象は定式化さえできれば Modelica で解くことができる。ただし、Modelica は時刻歴解析が基本となっているため、固有値問題を解く場合にはひと工夫必要であるし、自励振動のように安定限界を知るには理論解析を行った方がいい場合もある。また、Modelica 標準ライブラリ（MSL）はすべての振動現象をカバーしているわけではないので、Modelica 言語で直に書いて解くか、別途ライブラリを自作（これに関しては第 9 回でその方法を解説する予定である）して利用する。

身近な振り子を通して振動と言う現象を説明する。図 1 に示すように、長さ L の糸の先端に質量 m の錘を吊るして、左右に振動するようにしたものが振り子である。錘には鉛直方向に重力 mg（g は重力加速度）が、糸の支点方向には張力 S が作用している。振り子の振れ角をθとすると、錘の鉛直方向の釣り合いと振れ方向の自由振動の運動方程式は

$$S\cos\theta = -m\,g \tag{1}$$

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{2}$$

となる。式(2)をさらに変形すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \tag{3}$$

ここに、θが小さいとすると（マクローリン展開して）

$$sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \simeq \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

と置けるので、この最初の二項を取って、式(3)は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + {\omega_0}^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0 \tag{4}$$

となる。式(4)は非線形の運動方程式で、一般的には解析的に解くことができない。そこで、最初の一項のみ取って

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + {\omega_0}^2 \theta = 0 \tag{5}$$

が振り子の線形の運動方程式となる。この式は数学的には 2 回の常微分方程式と呼ばれる形で、この式より、振り子を自由振動させたときの固有振動数、固有周波数が以下のように求まる。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\mathrm{rad/s}) \quad 、 \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (1/\mathrm{s})$$

すなわち、振り子の固有振動数（振り子の錘をある位置から離した時の単位時間当たりの振れ回数）は振り子の錘の質量には寄らず、糸の長さと重力加速度に依存する。

次に、図 2 に示す振り子の強制振動について考える。錘の振れ方向に *Fsinωt* を外力として与えた場合を考えると、この系の運動方程式は

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin\theta = F\sin\omega t \tag{6}$$

ここで、線形のみ考えることにすると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + {\omega_0}^2 \theta = \frac{F}{mL}\sin\omega t = {\omega_0}^2\frac{F}{mg}\sin\omega t \tag{7}$$

となる。加振振動数ωが振り子の固有振動数ω_0に合致すると振り子は大きく振動する。これを共振現象と呼ぶ。式(7)を解析的に解くことにより、その現象を定量的に把握することができる。

以上の振り子の振動は第 2 回『方程式を解く』で紹介した一自由度系のばね・マスモデルと方程式としては同じである。また、振り子が二つ存在する二重振子は二自由度系のばね・マスモデルに相当する。これらの方程式を直接解く方法については第 2 回を参考にされたい。

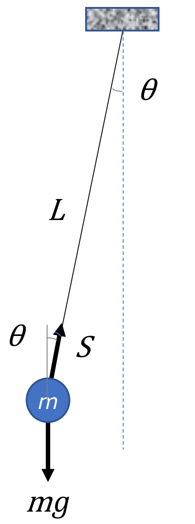

図１　振り子の振動：自由振動

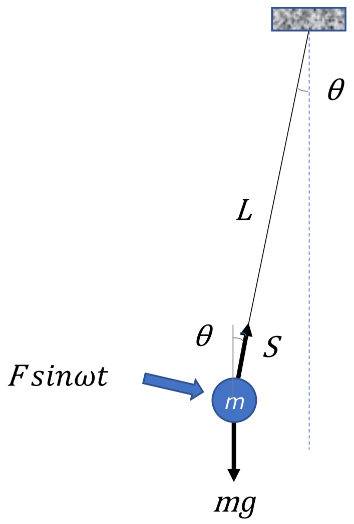

図２　振り子の振動：強制振動

次に、振り子の具体例としてブランコを考える。図３の例ではブランコで言うと、後ろから背中を押して貰った状態に相当する。振動に合わせて、背中を押しているので振動は大きくなる。これはいわゆる共振振動である。一方、ブランコでは自力で漕ぐことにより振動が可能である。何故だろう。外力を受けていないので強制振動ではない。図３にブランコを人が自力で漕いでいる状態を示す。このように、ブランコの振れに応じて膝を屈伸させている。最上点で膝を伸ばして、最下点で膝を折っている。つまり、振り子の振動の半周期（図３の左から右まで）の間に膝の屈伸運動は一周期となっている。これは、振り子として考えると長さ L が時間とともに変化していることになる。式(3)で線形項のみ考えると、この時の振り子の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L(t)}=0 \qquad \text{ここに} \qquad L(t)=L(1+\frac{\Delta L}{2L_0}\cos 2\omega_0 t) \tag{8}$$

となる。すなわち、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L(1+\frac{\Delta L}{2L_0}\cos 2\omega_0 t)}=0 \tag{9}$$

となる。一方、テイラー展開

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\cdots \simeq 1-x$$

を用いて、式(9)は次式となる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0{}^2\,(1-\frac{\Delta L}{2L_0}\cos 2\omega_0 t)\theta=0 \tag{10}$$

式(10)はマシュー方程式と呼ばれているもので、（）内が定数ではなく時間関数であることを特徴とする。この時間関数の振動数が系の固有振動数の二倍の時に系は自励振動する。この現象を係数励振振動またはパラメータ振動と言う。式(10)はまさにこの条件に相当するため、人が図３のようにブランコを漕ぐことにより、ブランコは大きく振動することができるのである。

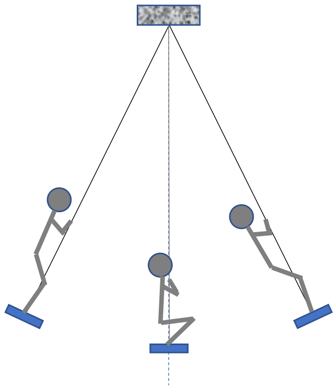

図３ ブランコの振動：自励振動