

## テーブル・椅子の足と座屈という現象

テーブル・椅子は図1に示すように複数（一般には4本）の足で支えられている。テーブルの場合には、天板の重さに加えて、テーブル上に置くものを支える必要がある。椅子の場合にはこの上に人が座るので人の重量は最低限支えなければならない。この場合、足はその長手方向に圧縮力を受ける。一般に物体が圧縮力を受ける場合には、ある限度までは物体の弾性で圧縮変形するが、ある限度（圧縮強度）を超えると破壊する。一方、テーブル・椅子の足のように細長い構造においては、圧縮強度よりはるかに小さい力で構造がその長手方向と直交する方向に変形する“座屈”という現象が発生する。



図1 テーブル・椅子の足

図2を用いて座屈という現象を説明する。後ほど簡単な実験で説明するが、金属の長尺（ものさし）を机の上に立て、上から手で力を加えた状態を想定して欲しい。この時、力 $F$ が小さい間は左の図のように、長尺には何の変化も起きない。一方、力 $F$ がある値（ $F_{cr}$ ）を超えると右の図のように力とは直行方向に変位を生じる。この現象を座屈といい、 $F_{cr}$ を座屈荷重と呼ぶ。座屈という現象は予兆もなく、ある圧縮力を超えると急に発生するので、このような細長い構造物では座屈荷重を事前に予測して設計に反映する必要がある。

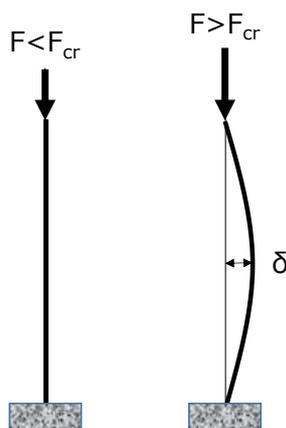


図2 座屈という現象

図3に圧縮力と座屈変位の関係を示す。理想的（構造物が長手方向に真直ぐで、圧縮力がその中心に作用する場合）には、実線で示すように圧縮力が  $F_{cr}$  になるまでは変位はなく、 $F_{cr}$  を超えると変位は発散する。一方、多くの場合、構造物は長手方向に真直ぐではなく何らかの初期変位を有し、圧縮力も軸心からずれて作用する。この場合には、圧縮力が  $F_{cr}$  より小さくても圧縮力によるモーメントが構造物に作用して通常の弾性変形を生じる。そして、圧縮力が  $F_{cr}$  に近づくに従って変形量が一気に増大して座屈する。この様子を点線で示す。

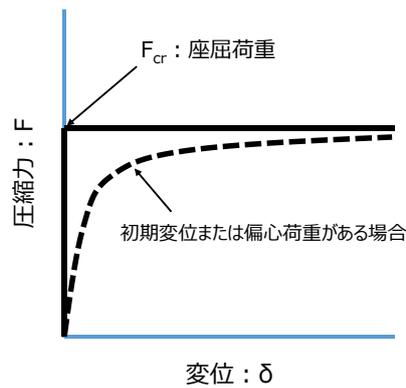


図3 圧縮力と座屈変位の関係

### 座屈の定式化

図4に示す片持ち梁の座屈を例に、座屈の定式化を行う。片持ち梁の自由端に圧縮力  $F$  が作用、右図のように座屈変形し、自由端で変位  $\delta$  が発生している状態を考える。この任意の位置での梁のモーメントは次式で表現できる。

$$(1)$$

一方、 $M$  は

$$(2)$$

となるので、最終的に釣合いの式は

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = F(\delta - y) \quad (3)$$

となる。ここに、

$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad (4)$$

と置くと、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta \quad (5)$$

となる。式(5)の一般解は

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \delta \quad (6)$$

である。片持ち梁の固定端（下端）での境界条件は

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (7)$$

であるから、式（7）と式（6）から、 $A = -\delta$ 、 $B = 0$  となり、式（6）は

$$y = \delta (1 - \cos kx) \quad (8)$$

となる。一方、自由端（上端）での境界条件は

$$y = \delta \quad \text{at } x = L \quad (9)$$

であり、式（9）と式（8）から

$$\delta \cos kL = 0 \quad (10)$$

となる。ここに座屈状態では  $\delta$  はゼロではないので

$$\cos kL = 0 \quad (11)$$

が座屈を定義する関係式となる。式（11）より

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

となり、 $n=1$  とし、式（4）を代入することにより、座屈荷重が次式で求まる。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (13)$$

なお、 $n=1$  は最低次の座屈で、理論的には二次( $n=2$ )、三次( $n=3$ )等の座屈が存在するが、通常は最低次の座屈を考慮すれば十分である。

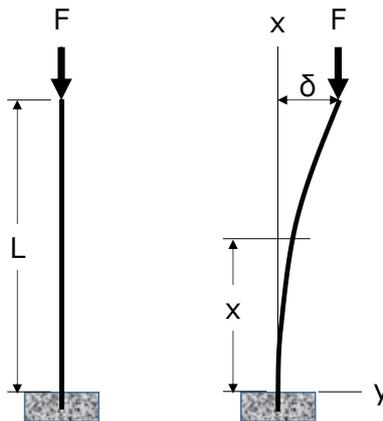


図4 片持ち梁の座屈

今回は座屈という現象を静的問題として扱っているが、より一般的には動的現象の安定不安定問題（固有値問題）として扱い、今回のように時間とともに静的に発散する現象をダイバージェンス（一般に言うところの座屈）、振動しながら発散する現象をフラッターと呼ぶ。ブラインドの板がある風速を超えると急に振動する現象、飛行機の翼がある条件下で急に振動を始める現象がフラッターの例である。

#### 座屈に関する簡単な実験

次に座屈に関する簡単な実験を行う。金属の長尺を使って、上部から手で圧縮力を与えてその時の長尺の変形状態を観測する。この場合、長尺は両端単純支持と考えるとことができ、図5に示すように片持ち梁の座屈荷重の式（13）において、 $L$ を $L/2$ に置き換えて、両端単純支持の場合の座屈が次式で定義できる。また、ここで使用する長尺は右図に示すように長さ $L$ 、幅 $b$ 、厚さ $t$ とする。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (14)$$

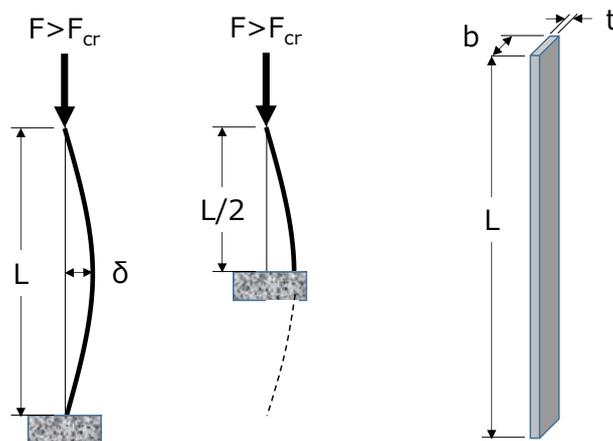


図5 両端単純支持梁の座屈

実験に使用した長尺は図6に示すように、 $175L \times 15b \times 0.5t$ で材質はステンレススチール（ $E=200\text{GPa}$ と仮定）である。この場合の断面二次モーメントは $I=bt^3/12$ であるから、これらの数値を式（14）に代入することにより、座屈荷重は $F=10.1\text{N}=1.03\text{kgf}$ と予測される。実験は秤（家庭用のアナログ式、 $2\text{kgf}$ 用）を用いて、秤の上に長尺を垂直に立て、その上部を手で少しずつ圧縮力を増やしていった。この時に長尺に作用する圧縮力は秤の目盛りで確認した。図6に結果を示す。圧縮力を増やしていくと $1.01\text{kgf}$ 付近で座屈が始まり、 $1.1\text{kgf}$ では完全に座屈した。予測値が $1.03\text{kgf}$ だったのでほぼ推定通りといえ

る。このように、座屈荷重に近くなると圧縮力はさほど増えていないのに大変形（座屈）する。一般の構造物の力と変位の関係が線形的なのに対して、座屈という現象は究極の非線形現象といえる。

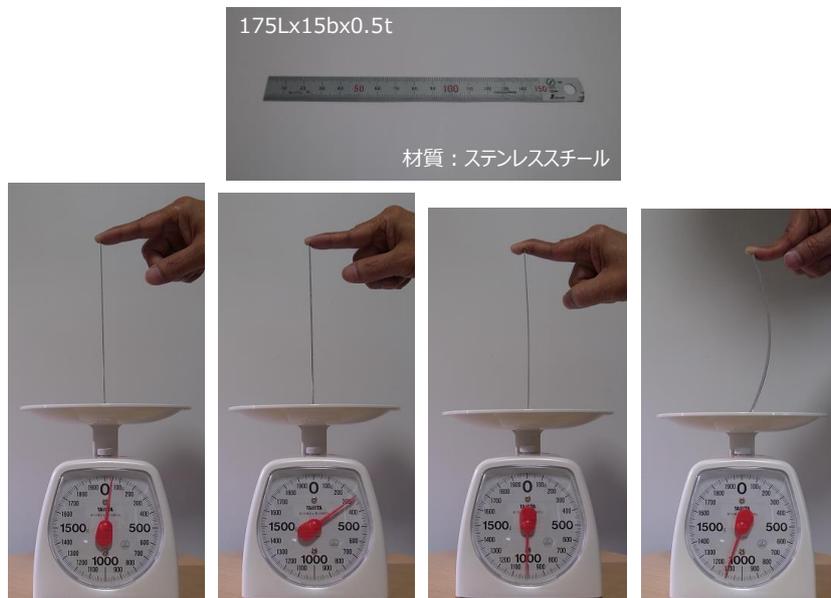


図 6 実験結果

#### テーブル・椅子の足の設計問題[1]

以上の知見を元に、図 1 で示した軽くてスリムな足の設計問題を材料選定の視点から考える。簡単のために足の形状は図 7 で示すような半径  $r$ 、長さ  $L$  の円筒状とし、この上部から鉛直方向に力を受けている状態を考える。この場合の、軽くてスリムな足の設計問題を下記のように考える。

設計目標	軽くてスリムなテーブル・椅子の足
制約条件	足の長さ 座屈しないこと 衝撃に耐えること
目的変数	質量の最小化 細長比の最大化
設計変数	足の径 材料

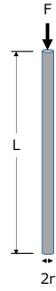


図7 テーブル・椅子の足

最初に軽いとは質量を小さくすることであるので

$$m = \pi r^2 L \rho \quad (15)$$

が目的関数となる。一方、座屈荷重は足が両端単純支持（上部が固定で横方向に自由、下部が単純支持と考えると片持ち梁）であると考えたと次式で表現できる。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^3 E r^4}{4L^2} \quad (16)$$

ここに、断面二次モーメントは  $I = \pi r^4/4$  となる。式(15)と式(16)から  $r$  を消去、 $F_{cr} > F$  の条件を考慮して式を得る。

$$m = \pi L \rho \left[ \frac{F_{cr} 4L^2}{\pi^3 E} \right]^{1/2} > \pi L \rho \left[ \frac{F 4L^2}{\pi^3 E} \right]^{1/2} \quad (17)$$

これより、質量に関する条件として次式が求まる。

$$m > \pi L \rho \left[ \frac{F 4L^2}{\pi^3 E} \right]^{1/2} = \left[ \frac{4F}{\pi} \right]^{1/2} L^2 \left[ \frac{\rho}{E^{1/2}} \right] \quad (18)$$

すなわち、次の指標  $M_1$  が大きいほど質量は小さくなる。

$$M_1 = \frac{E^{1/2}}{\rho} \quad (19)$$

次に、スリムに関係する半径  $r$  に関しては式(16)と  $F_{cr} > F$  の条件を考慮して式を得る。

$$r^4 = \frac{4L^2}{\pi^3 E} F_{cr} > \frac{4L^2}{\pi^3 E} F = \frac{4F}{\pi^3} L^2 \frac{1}{E} \quad (20)$$

これから、

$$r > \left[ \frac{4F}{\pi^3} \right]^{1/4} L^{1/2} \left[ \frac{1}{E} \right]^{1/4} \quad (21)$$

となり、次の指標  $M_2$  が大きいほど半径  $r$  は小さくなる。

$$M_2 = E \quad (22)$$

以上の結果から、 $M_1$ 、 $M_2$  が大きいほど“軽くてスリムな足”となる。この結果を Ashby マップで表現すると図 8 となる。図は横軸が密度 ( $\rho$ )、縦軸が縦弾性係数 ( $E$ ) で斜めの点線が軽さに関する設計指標 ( $M_1$ )、横破線がスリムさに関する設計指標 ( $M_2$ ) である。これより、軽いという観点からは、硬質ポリマーフォーム、木材、竹、CFRP、セラミックが候補となる。一方、スリムさの観点からセラミック、CFRP、竹、木材の順となり、硬質ポリマーフォームはかなりの太さになってしまう。セラミックは脆さの観点で問題があるので、CFRP、竹、木材が候補として残る。最終的にはコスト、加工性（これも一般にはコストに含まれる）も考慮して選定することになる。

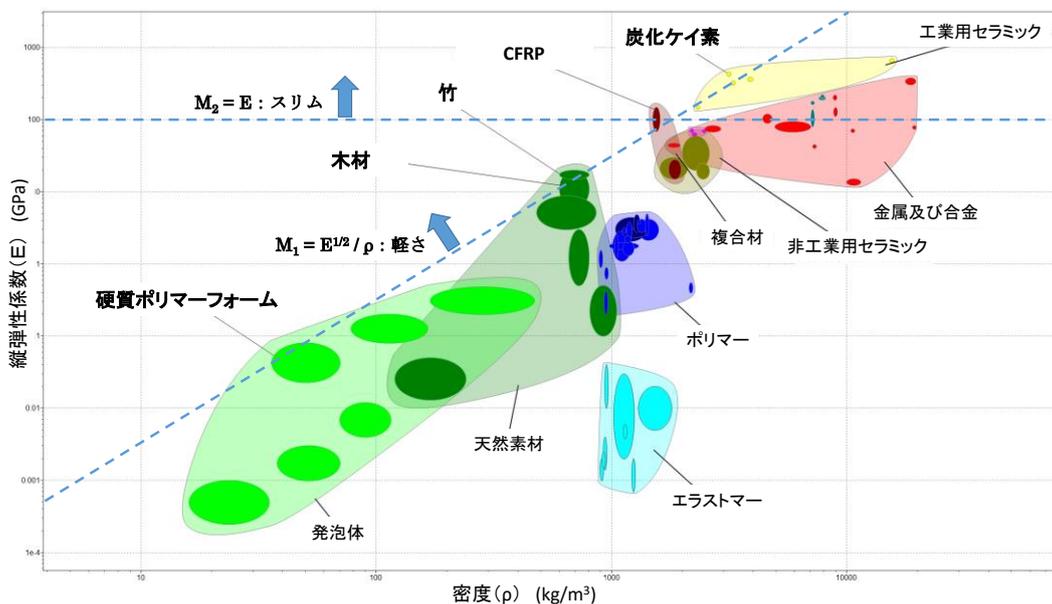


図 8 軽くてスリムな足の設計指標

以上は Ashby 先生の著書[1]に則った軽くてスリムな足の設計問題である。次に、テーブル・椅子の足のより一般的な（テーブル・椅子という製品の視点での）設計問題を考える。製品の視点からは、例えば、食事用のテーブル・椅子であれば制約条件としては食事ができて座れること、さらにある程度の使用者の体型を考慮することがあげられる。その上で、使いやすさ（食事がしやすくて座りやすい）を最大化することになる。以上を整理すると下記のようなになる。

設計目標	使いやすいテーブル・椅子の足
制約条件	食事ができて座れること 使用者の体型（身長、体重、他）
目的変数	使いやすさの最大化 （食事がしやすくて座りやすい）
設計変数	長さ（テーブル・椅子） 足の径（テーブル・椅子） 材料（テーブル・椅子）

設計変数としては足の長さ、径、材料となるが、これに加えて意匠的な視点も重要となる。特に、テーブルと椅子はセットで使用するので、個別に最適化するだけでなく、全体としてのバランス、統一感が製品としては何より必要となる。

上記の設計の視点と、Ashby 先生の材料の視点を対応付けると表 1 のようになる。材料の視点では足の長さは制約条件としたが、製品の視点ではこれは設計変数となる。また、製品の視点では、テーブルの足の長さや椅子の足の長さの関係も重要な設計変数となる。

表 1 テーブル・椅子の足の設計問題の二つの視点

	材料の視点	製品の視点
設計目標	軽くてスリムなテーブル・椅子の足	使いやすいテーブル・椅子の足
制約条件	足の長さ 座屈しないこと 衝撃に耐えること	食事ができて座れること 使用者の体型（身長、体重、他）
目的変数	質量の最小化 細長比の最大化	使いやすさの最大化
設計変数	足の径 材料	長さ（テーブル・椅子） 足の径（テーブル・椅子） 材料（テーブル・椅子）