弾性に関する基礎知識

弾性に関する基礎知識をファインマンの物理学[1]を参考に説明する。弾性に関しては工学分野の著名な多くの図書が存在するが、ファインマンの物理学の視点からの解釈に 1DCAE に共通する考え方を感じ、参考にした。

図 1 に示すように長さ L、高さ H（本来は 3 次元で考えるべきであるが、ここでは簡単のために 2 次元で説明する）の長方形の材料を考える。両端を力 F で引っ張ると、長さは ΔL 伸びる。なお、ここでは微小変形を前提とする。この時、伸びは与える力に比例する。

$$F \propto \Delta L \qquad (1)$$

式（1）はいわゆる“フックの法則”である。

一方、伸びは長さ L とも関係する。同じ力でも、長さが 2 倍の場合には伸びも 2 倍になる。そこで、伸びを比率で表して次式のように表現する。

$$F \propto \frac{\Delta L}{L} \qquad (2)$$

また、同じ力でも断面積が 2 倍になると、伸びは 1/2 になる。別の言い方をすると、同じ伸びを得るためには、2 倍の力が必要となる。これらを勘案すると図 1 の材料におけるフックの法則は最終的に次式で表現される。

$$F = EA\frac{\Delta L}{L} \qquad (3)$$

ここに、E は材料固有の値で縦弾性係数（ヤング率とも呼ばれる）である。

単位面積当たりの力を応力（σ）、単位長さたりの伸びを歪（ε）といい、これらの関係は式（3）より、次式で表現される。

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} = E\varepsilon \qquad (4)$$

さらに、材料を一方向に伸ばすと、伸びと直交方向に縮む。図 1 の例だと高さ方向に縮む。高さ H の縮みΔH（縮み量の場合は負の値）は高さ H と伸び率（ΔL/L）に比例するので

$$\frac{\Delta H}{H} = -\nu\frac{\Delta L}{L} \qquad (5)$$

となる。ここに、ν はポアソン比と呼ばれるもので、縮みと伸びの比率を表す材料固有の値である。

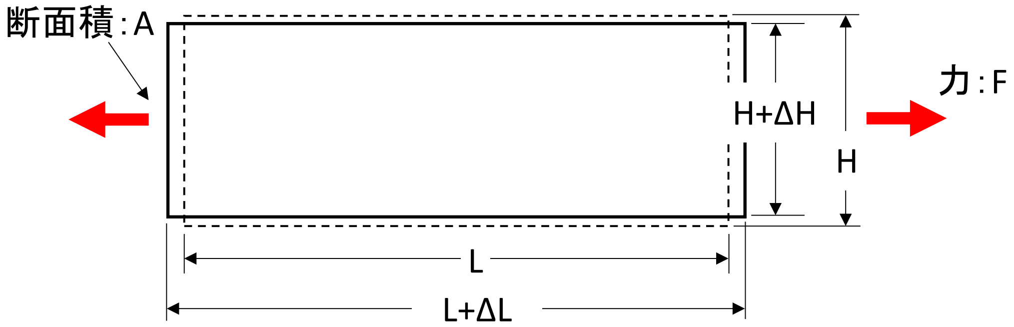


図１　力Ｆを両端に受ける材料

以上、材料の伸びについて説明した。次に、材料のせん断について説明するが、その前に図２に示すような立方体の材料が左右端に引張り力Ｆ、上下端に圧縮力Ｆを受ける場合の水平方向の伸びを考える。この場合、立方体の一つの面の面積をＡ、材料の縦弾性係数をＥ、ポアソン比をνとすると前述の議論から、図２の水平方向の伸び率は次式で与えられる。

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{1}{E}\frac{F}{A}+\nu\frac{1}{E}\frac{F}{A}=\frac{1+\nu}{E}\frac{F}{A} \qquad (6)$$

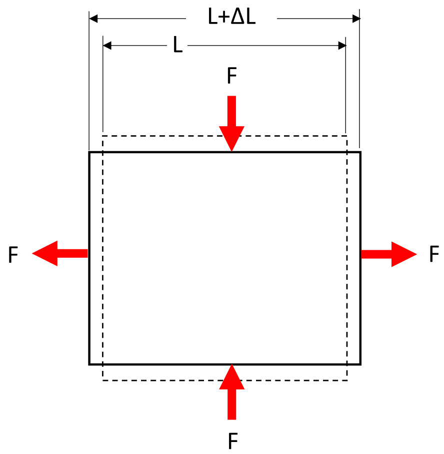


図２　引張り力と圧縮力を同時に受ける材料

材料のせん断について考える。図３に示すように、各辺が長さＬの立方体材料を考える。この上面にせん断力SFが作用、変形している様子を示している。この時、対角線（距離Ｄ）はある方向には伸び、これと直交する方向には縮む。これは図２に示した関係に相当する。従って、式（６）から次式が成立する（図２と図３の対応付けに関しては補足が必要と考えるが、紙面の関係もあり詳細はファインマンの物理学第17章“弾性”を参照されたい）。

$$\frac{\Delta D}{D}=\frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{SF}{A} \qquad (7)$$

ここで、せん断による変形角度をθ、上面の水平方向の移動量をδとすると次式が得られる。

$$\theta = \frac{\delta}{L} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{D/\sqrt{2}} = \frac{2\Delta D}{D} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{SF}{A} \qquad (8)$$

一方、単位面積当たりのせん断応力を τ とすると、式（８）を用いて

$$\tau = \frac{SF}{A} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \theta \qquad (9)$$

となる。ここで、せん断応力と変形角度の関係を

$$\tau = G\theta \qquad (10)$$

と表現すると、Ｇは

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (11)$$

となる。これは横弾性係数と呼ばれているもので、ポアソン比を介して縦弾性係数と関連付けられる。

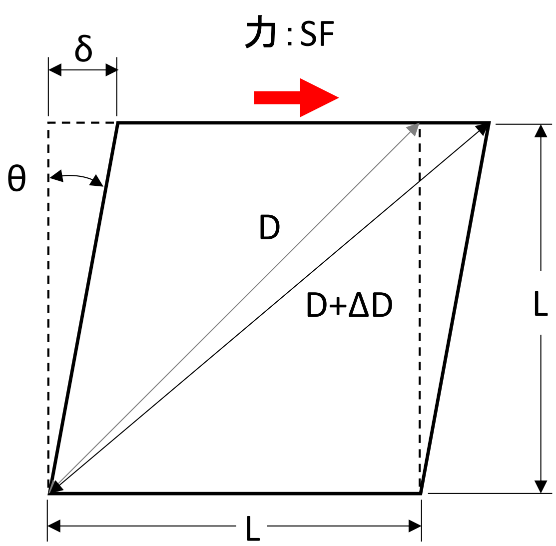


図３　せん断力を受ける材料

以上の“弾性”の知見をもとに、材料の弾性振動についてチモシェンコの新版工業振動学[2]を参考に以下説明する。

梁の縦振動

図 4 に示すように長さＬの梁の軸方向の弾性振動（縦振動）を考える。左端から x の位置の微小要素 dx を考える。u を軸方向の縦振動変位とすると微小要素の弾性力と慣性力のつり合いから次式が得られる。

$$S + \frac{\partial S}{\partial x}dx - S - \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (12)$$

ここに、S は x における軸方向応力の合計、ρ は材料の密度、A は断面積である。軸方向の力 S はフックの法則により、軸方向応力 σ 、軸方向歪 ε を用いて次式で表される。

$$S = A\sigma = EA\varepsilon = EA\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (１３)$$

ここに、E は材料の縦弾性係数である。式（１３）を式（１２）に代入して

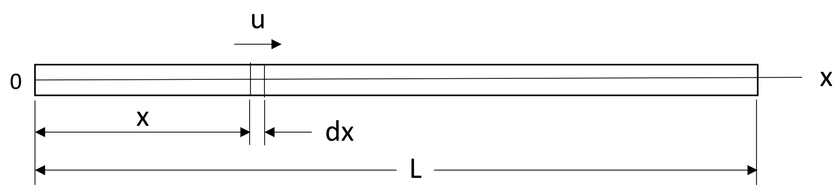
$$EA\frac{\partial 2u}{\partial x2}=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (14)$$

が得られ、ここで

$$u = u(x)e^{j\omega t} \qquad (１５)$$

と置くと最終的に梁の縦振動の固有振動数 ω が次式で求まる。

$$\omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (１６)$$



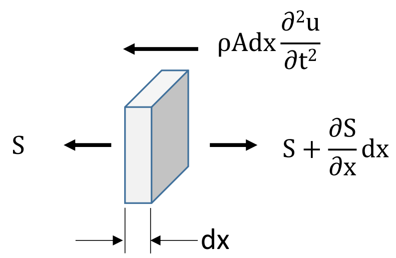


図４　梁の軸方向の弾性振動（縦振動）

梁の捩り振動

図５に示すように長さ L の円形断面を有する梁の捩れ方向の弾性振動（捩り振動）を考える。左端から x の位置の微小要素 dx を考える。θ を捩れ方向の捩れ振動変位とすると微小要素の弾性モーメントと慣性モーメントのつり合いから次式が得られる。

$$T+\frac{\partial T}{\partial x}dx - T - \rho I_p dx\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=0 \qquad (１７)$$

ここに、T は位置 x での内部トルク,I_p は断面の極慣性モーメントである。トルク T はフックの法則により次式で表される。

$$T = GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad （１８）$$

ここに、G は材料の横弾性係数である。式（１８）を式（１７）に代入して

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \qquad (19)$$

が得られ、ここで

$$\theta = \theta(x) e^{j\omega t} \qquad （２０）$$

と置くと最終的に梁の捩り振動の固有振動数ωが次式で求まる。

$$\omega \propto \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad （２１）$$

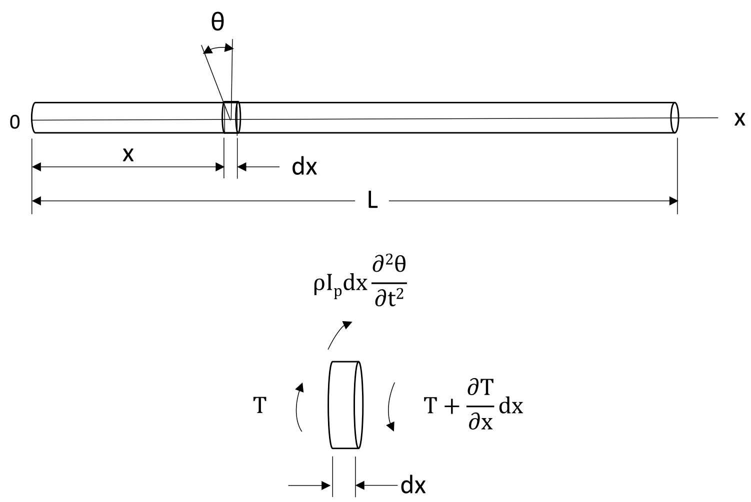


図５　梁の捩れ方向の弾性振動（捩り振動）

梁の横振動

図６に示すように長さＬの梁の横方向の弾性振動（横振動）を考える。左端から x の位置の微小要素 dx を考える。y を横方向の横振動変位とすると微小要素のせん断力 V、モーメント M と慣性力のつり合いから、y 方向のつり合い条件として

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) - \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad （２２）$$

モーメントのつり合い条件として

$$-Vdx + \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0 \qquad （２３）$$

が得られる。式（２３）を式（２２）に代入して

$$\frac{\partial 2M}{\partial x2}dx=-\rho Adx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad （２４）$$

一方、曲げの基礎理論（材料力学）から

$$M=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad （２５）$$

が得られ、式（２５）を式（２４）に代入して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial 2y}{\partial x2})dx=-\rho Adx\frac{\partial^{2y}}{\partial t^2} \qquad （２６）$$

となる。式（２６）が梁の横振動についての運動方程式となる。ここで

$$y=y(x)e^{j\omega t} \qquad （２７）$$

と置くと最終的に梁の横振動の固有振動数ωが次式で求まる。

$$\omega\propto\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad あるいは \quad \omega\propto\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad （２８）$$

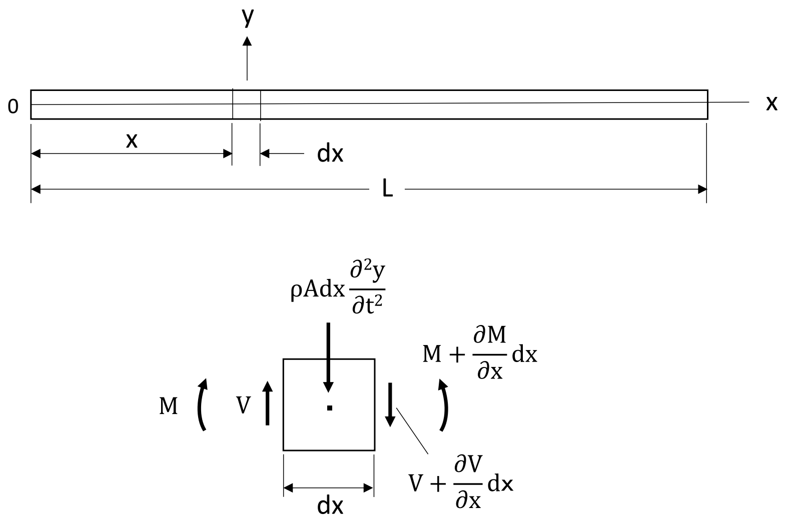


図６　梁の横方向の弾性振動（横振動）

板の振動

板の振動に関しては、梁の横振動を板に展開（二次元）して同様に固有振動数を求めることができる。ここではその詳細はチモシェンコの新版工業振動学を参照いただくとして結果だけを式（２２）に示す。

$$\omega\propto\sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{1}{\rho h}} \quad あるいは \quad \omega\propto\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \qquad （２９）$$

振動指標

以上の縦振動、捩り振動、横振動の固有振動数の結果を整理すると表 1 となる。これより、材料に依存する振動指標はこの表の右欄（形状一定の場合の固有振動数）となる。すなわち、梁の縦振動および横振動は

$$\text{振動指標１：}\quad \omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad （３０）$$

梁の捩り振動は

$$\text{振動指標２：}\quad \omega \propto \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad （３１）$$

板の振動は

$$\text{振動指標３：}\quad \omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \qquad （３２）$$

と、3 つの振動指標で材料の振動特性は表現できる。

表１　振動の形態による振動指標（固有振動数）

振動の形態	固有振動数（形状考慮）	固有振動数（形状一定）
梁の縦振動	$\omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
梁の横振動	$\omega \propto \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
梁の捩り振動	$\omega \propto \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\omega \propto \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
板の振動	$\omega \propto \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{1}{\rho h}}$	$\omega \propto \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$

上記の 3 つの振動指標を Ashby マップで表現した結果を図 7（振動指標 1）、図 8（振動指標２）、図 9（振動指標 3）に示す。図中の斜めの点線は金の固有振動数を示し、これより上であれば金よりも固有振動数が高く、これより下であれば低いことを意味する。当然のことながら、点線上での材料の固有振動数は同じである。

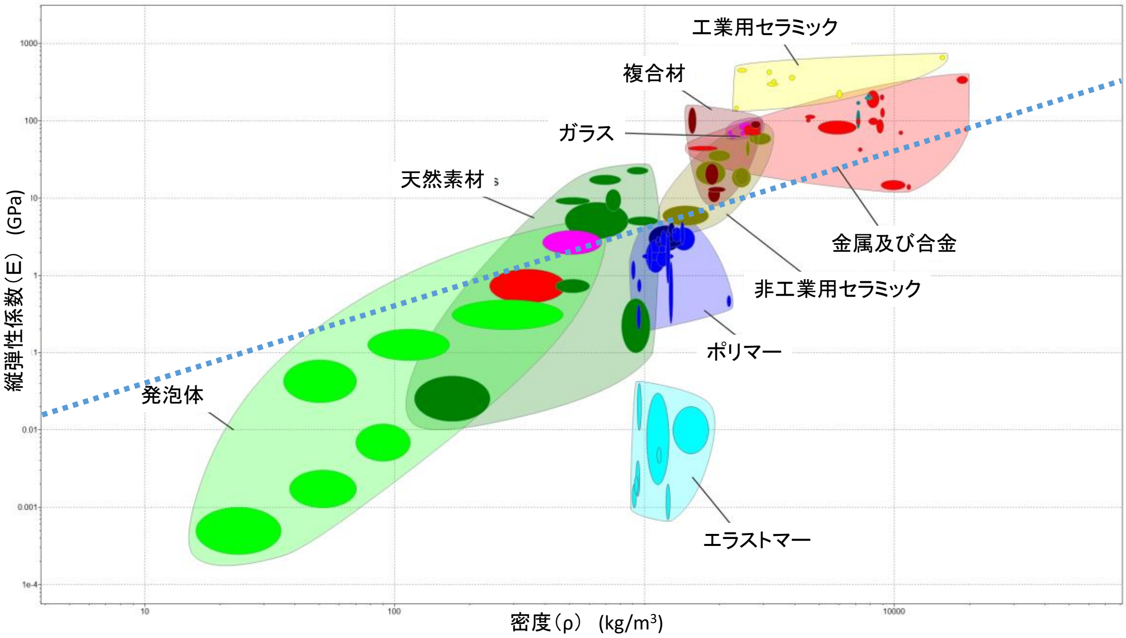


図７　振動指標１

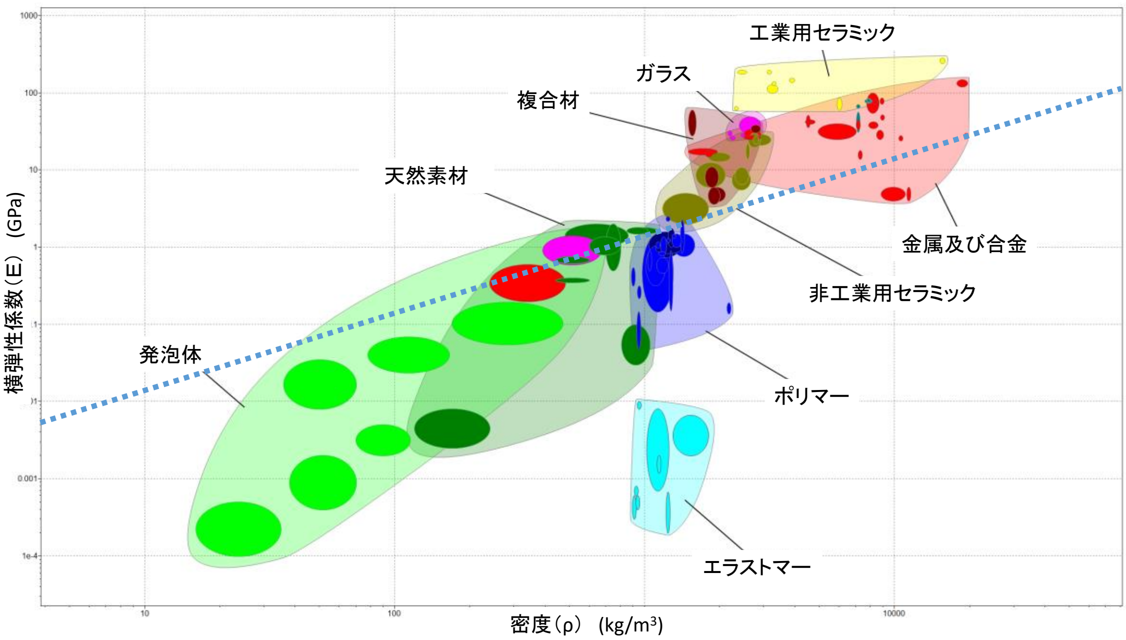


図８　振動指標２

図9　振動指標3

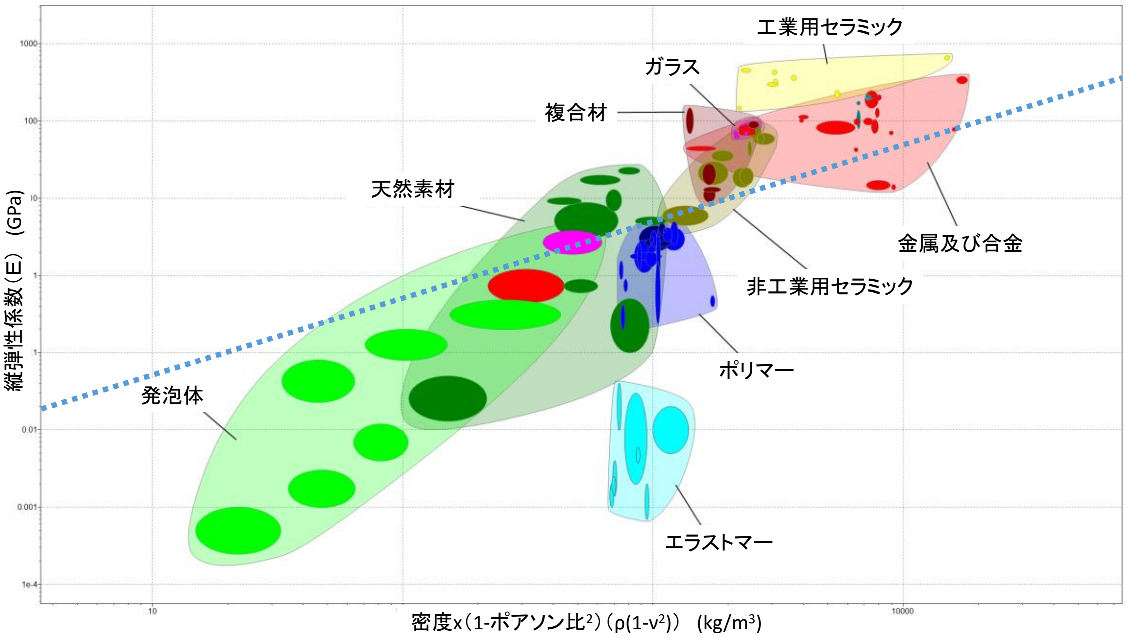


図９　振動指標３