

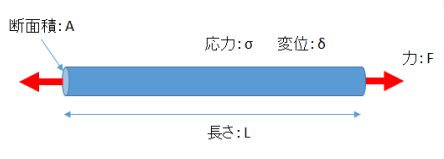
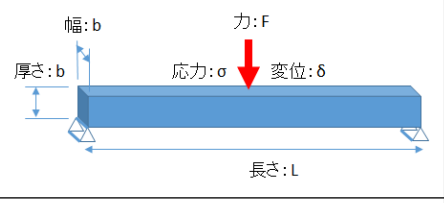
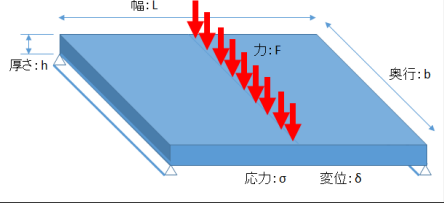
材料力学の基礎知識

三種類の基本構造、すなわち、タイ、梁、板に関して変位、応力を求める式の導出を行う。表 1 に示すように、タイとは両側から力 F を受けて材料の引張強度で構造物を支持する部材である。ここで、タイの長さを L 、断面積を A 、材料の縦弾性係数を E とするとタイの長手方向のばね定数は AE/L となり、 $F=(AE/L)\delta$ の関係から、変位 δ [m] は FL/AE となる。応力[N/m²]は力 F を断面積 A で割った値なので F/A となる。

梁に関しては表 1 に示すように、長さ L 、幅、厚さはいずれも b (矩形断面) で両端を単純支持され、その中央に長手方向と直交する方向に力 F を受けている状態を考える。この時、力 F を受けている場所の変位が最大となり、その大きさは材料力学の基本式[1]より表 1 に示す通りとなる。ここに、 I は梁の断面二次モーメントである。一方、応力は力 F を受けている場所でモーメントが最大となるため、その場所の外表面の応力が最大となる。その大きさは同様に材料力学の基本式より表 1 に示す通りとなる。

板に関しては表 1 に示すように奥行 b 、幅 L 、厚さ h で奥行方向の両端を単純支持され、中央奥行方向に力 F を受けている状態を考える。梁の場合と比較すると梁の厚さ b が板の厚さ h に代わっているだけなので、この置き換えを行うことにより、変位と応力が表 1 のように求まる。

表 1 基本構造の変位と応力

種別	諸元	変位: δ	応力: σ
タイ		$\delta = FL/AE$ E : 縦弾性係数	$\sigma = F/A$
梁		$\delta = FL^3/48EI$ $I = b^4/12$ (断面二次モーメント)	$\sigma = (3/2)(FL/b^3)$
板		$\delta = FL^3/48EI$ $I = bh^3/12$ (断面二次モーメント)	$\sigma = (3/2)(FL/bh^2)$

軽いタイの設計

軽いタイの設計を考える。“軽い”とは質量を小さくすることであるので

$$m = AL\rho \quad (1)$$

が目的関数となる。長さ L は制約条件として、断面積 A は自由に変えられるものとする。以下、さらに“剛なタイ”、“強いタイ”について考える。

(a) 軽くて剛なタイ

剛なタイとは変位（この場合は伸び）が小さいことを意味する。力 F を受けるタイの変位は表 1 に示した通り、 $\delta = FL/AE$ となる。これが目標値の変位 δ_s より小さい必要があることより、 $FL/EA \leq \delta_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$A \geq (FL/E)(1/\delta_s) \quad (2)$$

が得られる。式(1)と(2)から A を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq (FL^2/\delta_s) / M_{ta}, \quad M_{ta} = E / \rho \quad (3)$$

M_{ta} は一般に比剛性といわれているもので、この値が大きいほど“軽くて剛なタイ”となる。

(b) 軽くて強いタイ

強いタイとは応力（この場合は引張）が小さいことを意味する。力 F を受けるタイの応力は表 1 に示した通り、 $\sigma = F/A$ となる。これが目標値の応力 σ_s より小さい必要があることより、 $F/A \leq \sigma_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$A \geq F / \sigma_s \quad (4)$$

が得られる。式(1)と(4)から A を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq FL / M_{tb}, \quad M_{tb} = \sigma_s / \rho \quad (5)$$

目標値の応力 σ_s はタイの場合、引張強度 σ_t に対応し、この時の M_{tb} を一般に比強度といい、この値が大きいほど“軽くて強いタイ”となる。

以上より、タイの場合には比剛性、比強度がそのまま軽くて剛なタイの設計指標および軽くて強いタイの設計指標になる。比剛性 $M_{ta} = E / \rho$ を縦軸に、比強度 $M_{tb} = \sigma_t / \rho$ を横軸にとり、種々の材料をプロットしたのが図 1 である。これからタイにとって軽くて剛で強い材料は複合材であることがわかる。

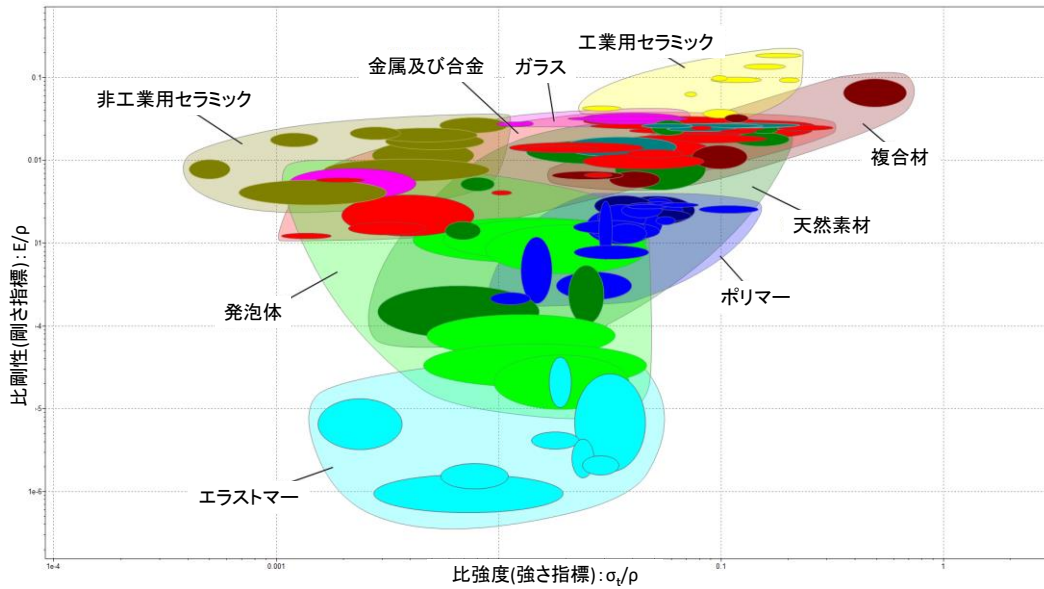


図1 タイの設計指標

軽い梁の設計

軽い梁の設計を考える。“軽い”とは質量を小さくすることであるので

$$m = AL \rho = b^2 L \rho \quad (6)$$

が目的関数となる。長さ L は制約条件として、断面積 A (b^2) は自由に変えられるものとする。以下、さらに“剛な梁”、“強い梁”について考える。

(a) 軽くて剛な梁

剛な梁は変位（この場合は撓み）小さいことを意味する。力 F を受ける梁の変位は表1に示した通り、 $\delta = FL^3/48EI$ となる。ここに、 $I = b^4/12$ なので $\delta = FL^3/4Eb^4$ となる。これが目標値の変位 δ_s より小さい必要があることより、 $FL^3/4Eb^4 \leq \delta_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$A = b^2 \geq (FL^3/E \delta_s)^{1/2} \quad (7)$$

が得られる。式(6)と(7)から A (b^2) を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq (1/2)(FL^5/\delta_s)^{1/2} / M_{ba}, \quad M_{ba} = E^{1/2} / \rho \quad (8)$$

M_{ba} の値が大きいほど“軽くて剛な梁”となる。

(b) 軽くて強い梁

強い梁とは応力（この場合は曲げ）が小さいことを意味する。力 F を受ける梁の応力は表1に示した通り、 $\sigma = (3/2)(FL/b^3)$ となる。これが目標値の応力 σ_s より小さい必要があることより、 $(3/2)(FL/b^3) \leq \sigma_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$b^3 \geq (3/2)FL / \sigma_s \quad (9)$$

が得られる。式(6)と(9)から A (b^2) を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq (3F/2)^{2/3} L^{5/3} / M_{bb}, \quad M_{bb} = \sigma_s^{2/3} / \rho \quad (10)$$

目標値の応力 σ_s は梁の場合、降伏強度 σ_y に対応し、この時の M_{bb} が大きいほど“軽くて強い梁”となる。

以上より、梁の場合には $M_{ba} = E^{1/2} / \rho$ が軽くて剛な梁の設計指標（これを“剛さ指標”と呼ぶ）、 $M_{bb} = \sigma_y^{2/3} / \rho$ が軽くて強い梁の設計指標（これを“強さ指標”と呼ぶ）になる。剛さ指標を縦軸に、強さ指標を横軸にとり、種々の材料をプロットしたのが図2である。これから梁にとって軽くて剛で強い材料はタイの場合と同様に複合材であることがわかる。

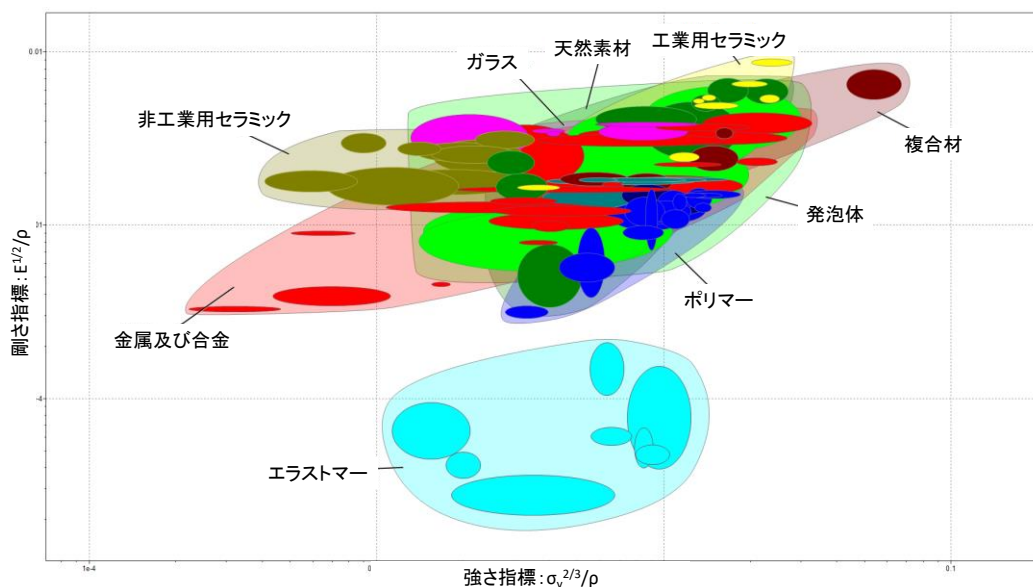


図2 梁の設計指標

軽い板の設計

軽い板の設計を考える。“軽い”とは質量を小さくすることであるので

$$m = AL\rho = bhL\rho \quad (11)$$

が目的関数となる。長さ L 、奥行 b は制約条件として、板厚 h は自由に変えられるものとする。以下、さらに“剛な板”、“強い板”について考える。

(a) 軽くて剛な板

剛な板は変位（この場合は撓み）小さいことを意味する。力 F を受ける板の変位は表1に示した通り、 $\delta = FL^3/48EI$ となる。ここに、 $I = bh^3/12$ なので $\delta = FL^3/4Ebh^3$ となる。これが目標値の変位 δ_s より小さい必要があることより、 $FL^3/4Ebh^3 \leq \delta_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$h \geq (FL^3/4Eb \delta_s)^{1/3} \quad (12)$$

が得られる。式(6)と(7)から $A (b^2)$ を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq L^2(Fb^2/4 \delta_s)^{1/3} / M_{pa}, \quad M_{pa} = E^{1/3} / \rho \quad (13)$$

M_{pa} の値が大きいほど“軽くて剛な板”となる。

(b) 軽くて強い板

強い板とは応力（この場合は曲げ）が小さいことを意味する。力 F を受ける板の応力は表 1 に示した通り、 $\sigma = (3/2)(FL/bh^2)$ となる。これが目標値の応力 σ_s より小さい必要があることより、 $(3/2)(FL/bh^2) \leq \sigma_s$ が制約条件となる。この式を変形して

$$h \geq ((3/2)(FL/b \sigma_s))^{1/2} \quad (14)$$

が得られる。式(14)と(15)から h を消去して最終的に質量に関する次式が得られる。

$$m \geq ((3/2)FL^3b)^{1/2} / M_{pb}, \quad M_{pb} = \sigma_s^{1/2} / \rho \quad (15)$$

目標値の応力 σ_s は板の場合、降伏強度 σ_y に対応し、この時の M_{bb} が大きいほど“軽くて強い板”となる。

以上より、板の場合には $M_{pa} = E^{1/3} / \rho$ が軽くて剛な板の設計指標（剛さ指標）、 $M_{pb} = \sigma_y^{1/2} / \rho$ が軽くて強い板の設計指標（強さ指標）になる。剛さ指標を縦軸に、強さ指標を横軸にとり、種々の材料をプロットしたのが図 3 である。これから板にとって軽くて剛で強い材料は発泡材であることがわかる。読者はなぜ発泡材が板の場合、剛で強い材料になるのかと疑問を持たれると思うが、ここでは“軽い”を目的関数にしているので金属に比べて 3 桁密度の小さい発泡材はその分、厚さを厚くしても質量の増え方に比べて剛性、強度の増え方が大きいためこのような結果になる。最も、机上での検討であり実際に金属より 3 桁も厚い発泡材は現実的ではない。このあたりは総合的に考える必要がある。

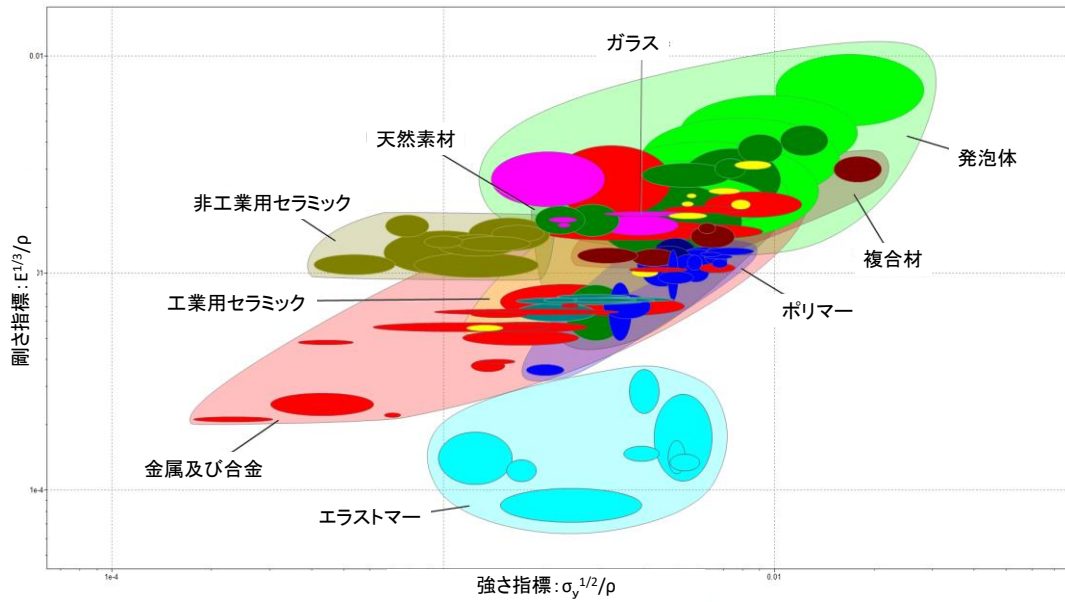


図3 板の設計指標

Ashby マップによる設計指標の表現

以上の結果を整理すると、三種類の基本構造（タイ、梁、板）に関する“軽くて剛い”設計指標（剛さ指標）は図4のように表すことができる。剛さ指標は剛であるほどこの図で言うところの左上の方になる。すなわち、この図で左上に位置する材料は剛さ指標が大きく、その度合いは、基本構造（タイ、梁、板）によって異なる。すなわち、タイの場合は工業用セラミックが最も剛であるが、板の場合には発泡体が最も剛となる。

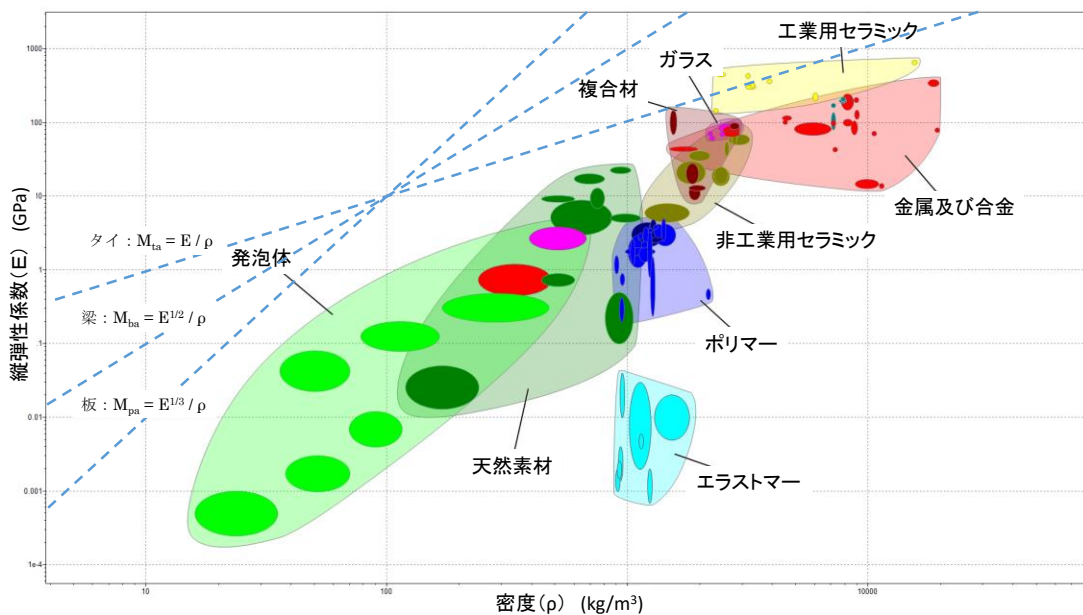


図4 “軽くて剛い” 設計指標：剛さ指標

同様に、三種類の基本構造（タイ、梁、板）に関する“軽くて強い”設計指標（強さ指標）は図5のように表すことができる。強さ指標は剛さ指標と同様に、この図で言うと左上に行くほど大きくなる。タイの場合は複合材が最も強いが、板の場合には発泡体が最も強い。

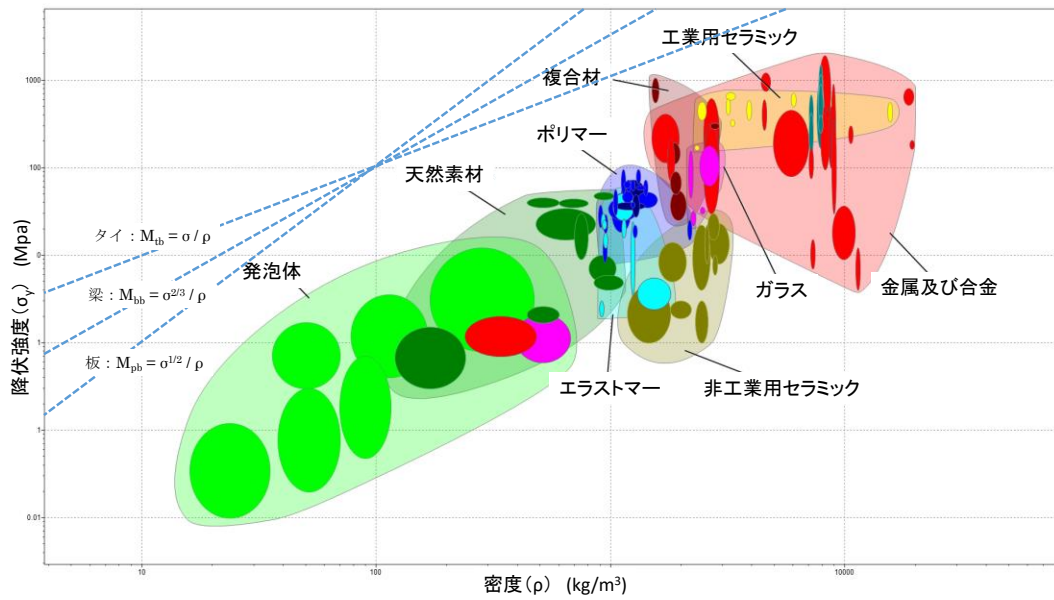


図5 “軽くて強い”設計指標：強さ指標