

重量最小化を例とした形状を考慮した剛性ならびに強度に関する設計指標

設計問題として“軽い構造物”の設計を考える。その基本的考え方については第3回で紹介、“軽くて剛な構造物”、“軽くて強い構造物”を設計するための材料選定に関する指標を導出した。ただ、この場合には構造物の形状（断面形状）に関しては設計変数としていなかった。そこでここでは形状係数を導入することによって、形状を考慮した剛性設計指標（剛さ）、強度設計指標（強さ）を導出する。表1に種々の構造／荷重に対する重量最小化のための形状を考慮した剛性／強度設計指標を示す。繫（引張）、梁（曲げ）、軸（ねじり）、柱（圧縮）の各構造／荷重条件下の設計指標である。ここに、 $E$ は材料の縦弾性係数、 $\rho$ は密度、 $\sigma_f$ は限界強度、 $\Phi$ は形状係数である。形状係数の上付きの $e$ は剛性に関する係数であることを、 $f$ は強度に関することを意味する。また、下付きの $B$ は曲げに関すること、 $T$ はねじりに関することを意味する。




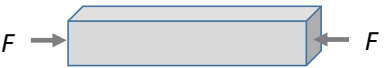
繫（引張）の場合は、剛性（変位）は長さ、断面積には依存するが断面の形状には無関係となる。また、強さ（応力）も同様に断面積のみに関係し、形状には依存しない。従って、長さ、断面積が同じであれば、断面形状によらず剛性設計指標、強度設計指標は表1に示す形式で表現される。

梁（曲げ）の場合には、第3回で示した剛さ、強さに関する設計指標で、 $E \rightarrow \Phi E$ 、 $\sigma \rightarrow \Phi \sigma$ と置き換えることにより、形状を考慮した剛性設計指標、強度設計指標が表1に示す形式で表現される。

軸（ねじり）の場合も、梁（曲げ）と同様の手順で表1に示す形式で表現できる。

柱（圧縮）の場合は、剛さに関しては座屈荷重が設計制約となるため、梁（曲げ）と同じ形式で剛性設計指標が定義できる。一方、強さに関しては圧縮強度が関係するため繫（引張）と同様の形式で表現でき、断面積のみに関係し、形状には依存しない。

表 1 種々の構造／荷重に対する重量最小化のための形状を考慮した剛性／強度設計指標

<p><b>繫</b> (引張)</p> 	$\frac{E}{\rho}$	$\frac{\sigma_f}{\rho}$
<p><b>梁</b> (曲げ)</p> 	$\frac{(\Phi_B^e E)^{1/2}}{\rho}$	$\frac{(\Phi_B^f \sigma_f)^{2/3}}{\rho}$
<p><b>軸</b> (振り)</p> 	$\frac{(\Phi_T^e E)^{1/2}}{\rho}$	$\frac{(\Phi_T^f \sigma_f)^{2/3}}{\rho}$
<p><b>柱</b> (圧縮)</p> 	$\frac{(\Phi_B^e E)^{1/2}}{\rho}$	$\frac{\sigma_f}{\rho}$
構造／荷重の形態	剛性設計指標	強度設計指標

#### 人力飛行機の主翼の材料選定例

表 1 の設計指標の具体例への適用方法として、図 1 に示す人力飛行機を考える。ここでは人力飛行機の主翼を対象に、設計問題を下記のように設定する。

対象	人力飛行機の主翼
設計制約	十分な剛性、長さ
目的関数	重量最小
設計変数	材料、断面の大きさと形状

上記設計問題は表 1 の梁（曲げ）の剛性設計指標  $M$  を最大化する問題に置き換えることができる。すなわち、

$$M = \frac{(\Phi_B^e E)^{1/2}}{\rho} \quad (1)$$

が最大となる材料、形状を選定する設計問題となる。表 2 に人力飛行機の主翼の材料候補の材料特性（縦弾性係数、密度）、形状を考慮しない設計指標、形状係数（各材料が取り得る最大の値）、剛性設計指標を示す。一般に模型飛行機にはバルサ材が用いられるが、これは設計指標が最大であることから理解できる。一方、木材は取り得る断面形状に

制約があるため、形状係数を大きくすることができない。鋼、アルミは設計指標は小さいが、形状係数は大きく取ることができる。CFRP は設計指標、形状係数いずれもある程度の値をとることができる。ベリリウム、アルバベット（アルミとベリリウムの複合材）も CFRP と同様の傾向にある。以上から、剛性設計指標はベリリウム、CFRP が高いということになる。ベリリウム系の材料は一般的ではないので、通常は CFRP、アルミ合金、バルサ材が主翼材料として現実的な選択肢となる。

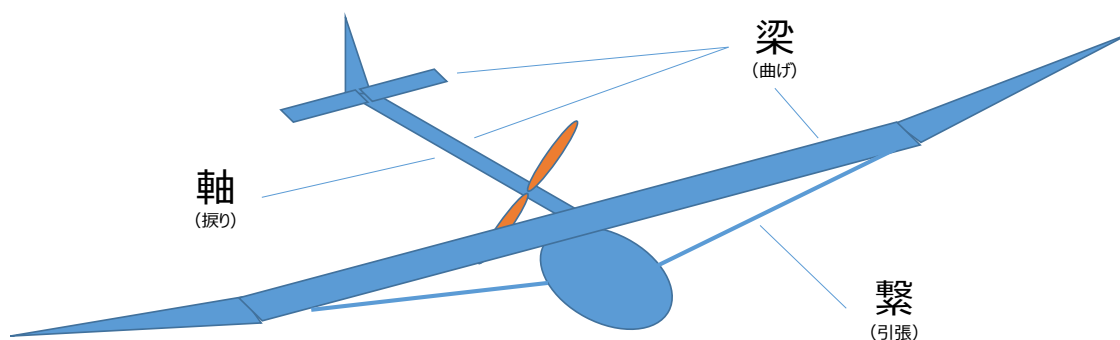


図1 人力飛行機の構造／荷重の形態

表2 人力飛行機の主翼の材料候補

材料	縦弾性係数 $E$ (GPa)	密度 $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	設計指標 $E^{1/2}/\rho$	形状係数 $\Phi_B$	剛性設計指標 $(\Phi_B E)^{1/2}/\rho$
バルサ材	4.6	210	<b>10</b>	2	14
トウヒ材	10.3	450	8	2	11
鋼	205	7850	1.8	25	9
アルミ合金	70	2700	3	25	15
CFRP	115	1550	7	10	<b>22</b>
ベリリウム	300	1840	9.3	15	<b>36</b>
アルバベット	185	2100	6.5	15	25

Ashby マップを用いた材料選定例

次に、Ashby マップを用いて形状も考慮した材料選定を行う手順について考える。例題として人力飛行機の主翼材料候補の剛性設計指標を考える。剛性設計指標は式(1)で定義

できるが、これは次式のように変形できる。

$$M = \frac{(\Phi_B^e E)^{1/2}}{\rho} = \frac{(E/\Phi_B^e)^{1/2}}{\rho/\Phi_B^e} = \frac{E^{*1/2}}{\rho^*} \quad (2)$$

すなわち、縦弾性係数  $E$  と密度  $\rho$  を

$$E^* = \frac{E}{\Phi_B^e} \quad \rho^* = \frac{\rho}{\Phi_B^e} \quad (3)$$

と置き換えることにより、Ashby マップ上に表現することができる。図 2 に人力飛行機の主翼材料候補の剛性設計指標を Ashby マップ上に表現した例を示す。材料としては木材、CFRP、アルミ合金を対象とし、各材料の曲げ剛性に関する形状係数をそれぞれ 2、10、25 とする。これらの結果より、形状を工夫することにより高い設計指標を実現できることが視覚的に理解できる。以上より、式 (3) で表現される仮定の縦弾性係数、密度を導入することにより、形状を考慮した材料選定を視覚的に実施することが可能となる。

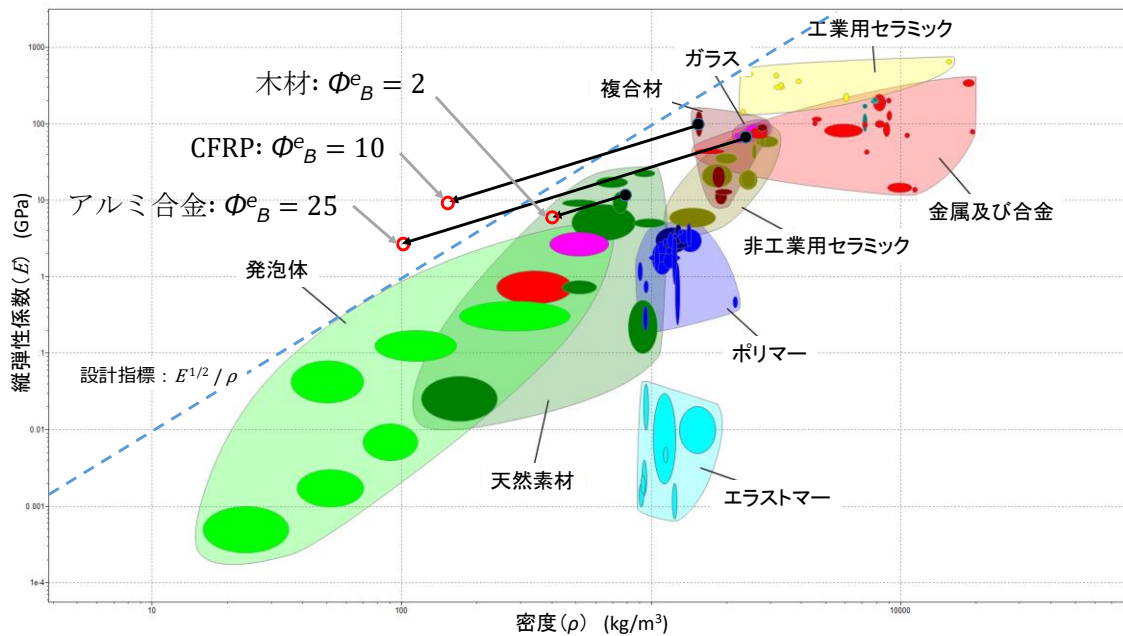


図 2 人力飛行機の主翼材料候補の剛性設計指標

テーブル脚の材料と形状を決定する設計手順例

第 7 回で紹介したテーブルの脚の設計問題に形状も考慮することを考える。基本的な手順は第 16 回の図 5 で示したが、ここではより具体的に説明する。テーブルの脚は一般に長

さは制約条件（1m とする）となり、材料および形状が設計変数となる。ここでは脚の断面は円管とする。中実円管の場合は曲げの形状係数は第 17 回の表 1 より、約 1（正確には 0.955）である。一方、中空円管の場合は同じく表 2 より、形状係数は  $r/t$  ( $r$ : 円管の半径、 $t$ : 肉厚) に比例して大きくなる。ただし、あまり薄くなると円筒座屈するため限度がある。一方、制約条件として座屈荷重があり、これはテーブルに掛かる荷重により決定される。

以上を考慮して、テーブル脚の材料と形状を決定する設計手順例を図 3 により説明する。左上図には材料候補を縦軸に縦弾性係数、横軸に密度を取って示す。ここでは候補として GFRP を選択する。右上図は曲げ剛性に関するもので、縦軸に縦弾性係数、横軸に断面二次モーメントを取り、等値曲げ剛性 ( $EI$ ) を斜めの線で示す。ここで座屈荷重の制約から

$$EI > 200\text{Nm}^2$$

とすると、左上図の GFRP から引いた水平線と曲げ剛性の  $EI = 200\text{Nm}^2$  の等値線との交点の横座標が曲げ剛性に相当する断面二次モーメントとなる。右下図は断面形状に関する情報を形状係数、管径をパラメータに、縦軸に断面積、横軸に断面二次モーメントを取って示したものである。形状係数（実線）、管径（点線）は斜めの等値線で示す。GFRP の場合は中軸円管の場合、形状係数は 1、管径は 8mm、中空円管の場合は取り得る最大の形状係数は 10、この時の管径は 15mm となる。次に、右下図の結果を左下図の性能（縦軸；断面積、横軸：密度）に反映する。左上図から降ろした垂線と右下図から引いた水平線との交点が最終的な性能となる。左下図の斜めの線は等重量線である。このように GFRP を材料候補とした場合、中空円管を採用することにより、同じ剛性性能で中実円管に比べて 1/3 以下の軽量化を実現することができる。

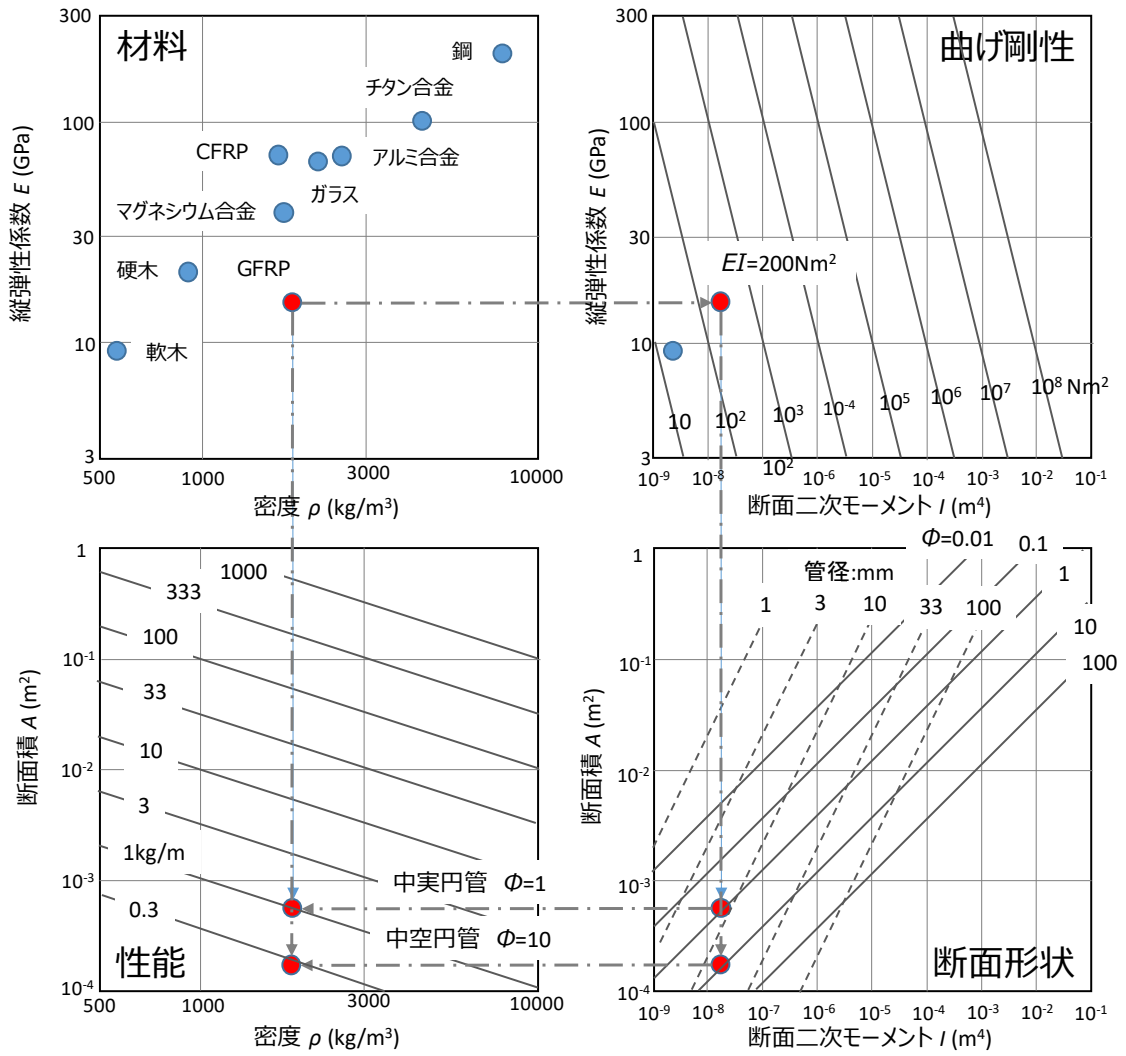


図3 テーブル脚の材料と形状を決定する設計手順例