曲げ強度

材料は荷重（力、モーメント）を加えると変形していく。この変形のし難さが剛性である。この剛性は同じ断面積でも形状を工夫することによって大きくすることができる。この大きくできる度合いが剛性に関する形状係数である。一方、材料へ加える荷重を増やしていくと弾性域から塑性域に移行する。塑性という現象は材料全体に一斉に起こるのではなく、応力の大きい個所から発生する。弾性域の範囲の荷重であれば荷重を除去すると材料は元の状態に戻る。この限界の荷重を弾性限度と呼ぶ。弾性限度を越えて荷重を増やすと材料の降伏強度を越えた部位から降伏が始まる。一度、降伏域が発生すると材料は元には戻らない。

一方、繰り返し荷重（周期的荷重）を受ける場合には疲労強度なるものが存在する。上記の降伏強度以下の疲労強度で材料は塑性現象を発生する。疲労強度は繰り返し数が大きいほど小さくなる。また、繰り返し荷重に一定の静的荷重が存在する場合には、この大きさも疲労強度に影響する。一般にはある繰り返し数を超えるとある一定の疲労強度に落ち着くので、繰り返し数が推定できない場合は、繰り返し数無限大の疲労強度を用いることが多い。

以上が強度に関する一般的な説明であるが、降伏強度、疲労強度に関わらず最大応力が発生する部位の応力を限界強度より小さくすることが強度設計の目標となる。曲げを考えた場合、応力 σ は梁の中立軸から最も離れた点 y_m で発生する。すなわち、応力は下式で定義できる。

$$\sigma = \frac{My_m}{I} = \frac{M}{Z} \qquad (1)$$

ここに、M は曲げモーメント、I は断面二次モーメントである。塑性はこの応力が降伏強度を超えた時点で始まる。Z は断面係数と呼ばれているもので、$Z=I/y_m$ である。ここで曲げ強度に関する形状係数 Φ_B を Z/Z_0 と定義する。Z_0 は断面積 A を有する矩形断面を有する梁（一辺が b_0）の断面係数で、次式で表される。

$$Z_0 = \frac{{b_0}^3}{6} = \frac{A^{3/2}}{6} \qquad (2)$$

従って、曲げ強度に関する形状係数は次式で定義できる。

$$\Phi_B = \frac{Z}{Z_0} = \frac{6Z}{A^{3/2}} \qquad (3)$$

剛性に関する形状係数と同様に、無次元数であるので大きさに関係なく、相似形状であれば強度に関する形状係数は同じとなる。曲げ強度の形状係数が 10 ということは曲げに対して 10 倍の強度を有している形状であることを意味する。

図 1 に縦軸に断面係数 Z、横軸に断面積 A を取り、代表的な材料に関して、現実的に取りうる形状係数の範囲を示す。このように取りうる形状係数の範囲が存在する理由は、剛性の形状係数のところで述べたのと同じ理由による。強度の形状係数は発生応力が中立点から最も遠い距離に比例するために、結果として極端な形状（縦に長いＩビーム等）を取ることができず、取りうる形状係数の範囲も剛性の場合に比べて狭くなる。

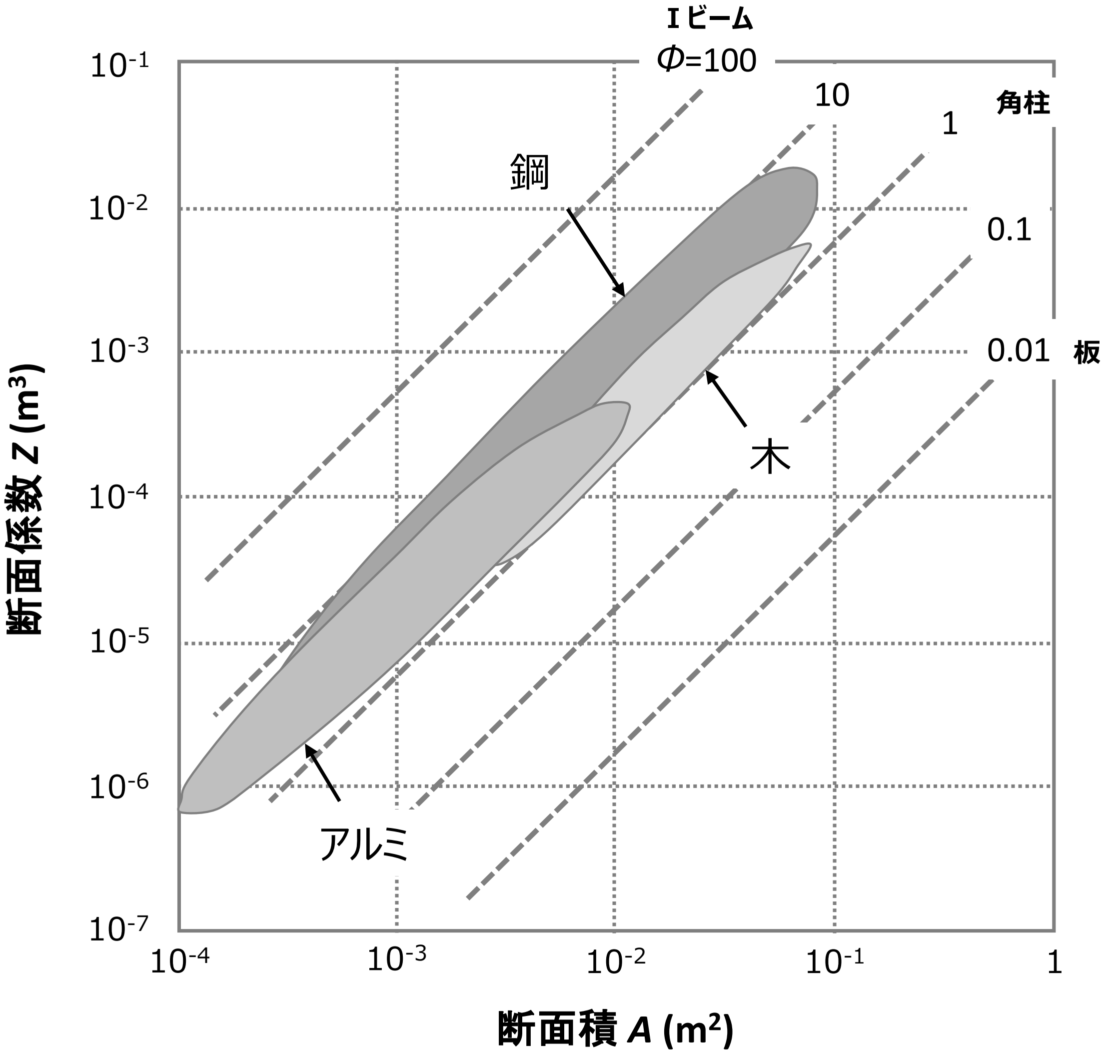


図１　材料と形状に関する制約

ねじり強度

ねじり強度に関する議論も曲げ強度と同様の手順で進めることができるが断面が円形でない場合は、若干複雑となる。

円形断面を有する軸の場合には、発生する剪断応力 τ は中心軸から際外周の距離 r_{m} にて最大となり、次式で表現できる。

$$\tau = \frac{Tr_m}{J} \qquad (4)$$

ここに、 T はトルク、 J は断面二次極モーメントである。この場合、J/r_{m} 曲げ強度に関する I/y_{m} に相当する。

一方、断面が円形でない場合には発生する最大剪断応力は次式で定義する。

$$\tau = \frac{T}{Q} \qquad (5)$$

ここに、Q はねじりに関する断面係数で曲げに関する断面係数 Z と同等の役割を果たす。Q も Z も長さの三乗の次元を有する。ここで曲げ強度に関する形状係数 Φ_T を Q/Q_0 と定義する。Q_0 は断面積 A を有する矩形断面を有する梁（一辺が b_0）のねじりに関する断面係数で、次式で表される（こうなる理由は後述する）。

$$Q_0 = \frac{{b_0}^3}{4.8} = \frac{A^{3/2}}{4.8} \qquad (6)$$

従って、曲げ強度に関する形状係数は次式で定義できる。

$$\Phi_T = \frac{Q}{Q_0} = 4.8\frac{Q}{A^{3/2}} \qquad (7)$$

種々の断面形状の曲げ強度、ねじり強度に関する形状係数

以上の知見をもとに代表的な形状である中実長方形円形形状、薄肉長方形円形形状、I 型、H 型形状に関して、曲げ強度とねじり強度に関する断面係数および形状係数について説明する。

(a)中実長方形円形形状

表 1 に中実長方形円形形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数を示す。長方形断面の断面係数は次式より導出できる。

$$Z = I/y_m = 2\int_0^{h/2} y^2 b\,dy / y_m = \frac{bh^3}{12} \Big/ \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

円形断面のねじりの断面係数は断面二次極モーメント J を用いて次式より導出できる。

$$Q = J/r_m = \int_0^{r} r^2\, 2\pi r\,dr / r = \frac{\pi}{2} r^4 / r = \frac{\pi}{2} r^3$$

なお、円形断面の場合には曲げの断面係数はねじりの断面係数の半分となる。

長方形断面の曲げの形状係数は基本形状を一辺 b_0 の矩形形状とすると、断面積に関して $A=bh={b_0}^2$ の関係があることより、次式より導出できる。

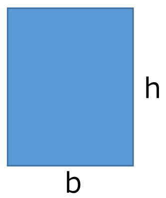
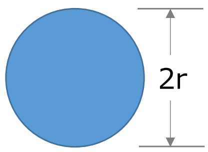
$$\Phi_B = \frac{I}{I_0}\ \frac{y_{m0}}{y_m} = \frac{bh^3}{12}\ \frac{12}{{b_0}^4}\ \frac{b_0}{2}\ \frac{2}{h} = \sqrt{\frac{h}{b}}$$

同様に、半径 r の円形断面の曲げの形状係数は、断面積に関して $A=\pi r^2={b_0}^2$ の関係があることより、次式より導出できる。

$$\Phi_B = \frac{I}{I_0}\,\frac{y_{m0}}{y_m} = \frac{\pi r^4}{4}\,\frac{12}{{b_0}^4}\,\frac{b_0}{2}\,\frac{1}{r} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$$

一方、円形断面のねじりの断面係数は曲げの断面係数の二倍であるので$(\pi/2)r^3$となり、これに、$A=\pi r^2$　を考慮するとねじりの形状係数は 1.35 となる。また、非円形断面である長方形断面のねじりの断面係数、形状係数は近似的に表 1 となる。ここに、長方形断面のねじりの断面係数において、$b=h=b_0$ と置くと式（6）が求まる。

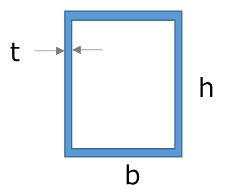
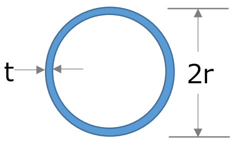
表 1　中実長方形円形形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数

	断面積 A	断面係数 Z	ねじり断面係数 Q	曲げ形状係数 Φ_B	ねじり形状係数 Φ_T
	bh	$\frac{bh^3}{6}$	$\frac{b^2h^2}{(3h+1.8b)}$	$\sqrt{\frac{h}{b}}$	$1.6\sqrt{\frac{b}{h}}\,\frac{1}{\left(1+0.6\frac{b}{h}\right)}$
	πr^2	$\frac{\pi}{4}r^3$	$\frac{\pi}{2}r^3$	$\frac{3}{2\sqrt{\pi}} = 0.846$	1.35

(b)薄肉長方形円形形状

表 2 に薄肉長方形円形形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数を示す。ここに、肉厚 t は幅 b、高さ h、半径 r に比べて十分に小さいものとする。例えば、薄肉円形形状の場合、曲げ形状係数、ねじり形状係数のいずれも半径と肉厚の比の平方根に等しくなる。

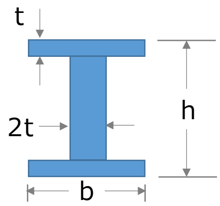
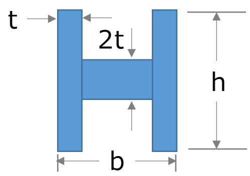
表 2　薄肉長方形円形形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数

	断面積 A	断面係数 Z	ねじり断面係数 Q	曲げ形状係数 Φ_B	ねじり形状係数 Φ_T
	$2t(h+b)$	$\frac{1}{3}h^2t(1+3\frac{b}{h})$	$2tbh\left(1-\frac{t}{h}\right)^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h}{t}}\frac{(1+\frac{3b}{h})}{\left(1+\frac{b}{h}\right)^{3/2}}$	$3.39\sqrt{\frac{h^2}{bt}}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{b}\right)^{3/2}}$
	$2\pi rt$	πr^2t	$2\pi r^2t$	$\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{r}{t}}$	$1.91\sqrt{\frac{r}{t}}$

(c)I 型、H 型形状

表 3 に I 型、H 型形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数を示す。ここに、肉厚 t は幅 b、高さ h に比べて十分に小さいものとする。幅と高さが等しい場合（$b=h$）には、ねじりの断面係数と形状係数は等しくなる。

表 3　I 型、H 型形状の曲げとねじりの断面係数、形状係数

	断面積 A	断面係数 Z	ねじり断面係数 Q	曲げ形状係数 Φ_B	ねじり形状係数 Φ_T
	$2t(h+b)$	$\frac{1}{3}h^2t(1+3\frac{b}{h})$	$\frac{2}{3}bt^2(1+4\frac{h}{b})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h}{t}}\frac{(1+\frac{3b}{h})}{\left(1+\frac{b}{h}\right)^{3/2}}$	$1.13\sqrt{\frac{t}{b}}\frac{(1+\frac{4h}{b})}{\left(1+\frac{h}{b}\right)^{3/2}}$
	$2t(h+b)$	$\frac{t}{3h}(h^3+4bt^2)$	$\frac{2}{3}ht^2(1+4\frac{b}{h})$	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{h}{t}}\frac{(1+\frac{4bt^2}{h^3})}{\left(1+\frac{b}{h}\right)^{3/2}}$	$1.13\sqrt{\frac{t}{h}}\frac{(1+\frac{4b}{h})}{\left(1+\frac{b}{h}\right)^{3/2}}$

座屈強度

以上、梁の曲げ強度、軸のねじり強度について説明したが、圧縮荷重を受ける柱の場合には座屈強度なるものが存在する。座屈はある圧縮荷重を超えると発生する現象で、第 7 回で述べたようにこの限界の荷重を座屈荷重と呼ぶ。この現象は材料の強度とは無関係に材

料の物性値である縦弾性係数 E と構造物の形状で次式のように決まる。

$$F_c = \frac{n^2\pi^2 E I_{\min}}{L^2} \qquad (8)$$

ここに、n は境界条件、座屈モードによって決まる値、$I_{\min}$ は最小方向の断面二次モーメントである。この場合の形状係数は梁の曲げの形状係数と同じになる。ここで、注意すべき点は梁の曲げの場合は荷重方向と変形方向が同じであるが、柱の座屈の場合には上述のように断面二次モーメントが最も小さい方向に変形する点にある。対象とする構造物において、いかなる現象が発生するかを事前に予測することが重要となる。