

## 形状係数

図 1 を用いて、梁の曲げ剛性に及ぼす断面形状の影響を説明する。基本形状として一辺が  $b$  の矩形形状を考える。矩形形状の断面積は  $A_0=b^2$ 、断面二次モーメントは  $I_0=b^4/12$  となる。基本形状となる矩形断面と同じ面積を有する中空円環形状（図 1 の左下図）を考える。この場合、断面二次モーメントは後述するように矩形断面より大きくなる。ここでは中空円環形状の断面二次モーメントを  $I=2.5I_0$  とすると曲げ剛性に関する形状係数は次式

$$\Phi_B = \frac{S}{S_0} = \frac{EI}{EI_0} = \frac{I}{I_0} \quad (1)$$

より  $\Phi_B=2.5$  となる。添え字の  $B$  は曲げ剛性に関するものであることを示す。すなわち、同じ量の材料であっても形状を工夫することによってより高い性能（この場合は曲げ剛性）を有することを形状係数という指標を用いて表現することができる。一方、性能は同じで重量を下げたい場合もある。このような場合には、図 1 の右下に示すように薄肉円環形状にする方法がある。この場合は、断面二次モーメント（曲げ剛性）は同じ（形状係数は 1）だが重量を 1/4 に低減できる。パイプライン等で薄肉円管が使用されているのはこのような理由による。

次に、図 2 形状係数の形状依存性、寸法非依存性について述べる。図 2 の上図は幅  $b$ 、高さ  $h$  の長方形断面を有する。この長方形断面の曲げ剛性に関する形状係数は後述するように  $h/b$  となる。ここで、高さが幅の二倍、すなわち  $h=2b$  とすると形状係数は  $\Phi_B=2$  となる。すなわち、形状係数は形状にのみ依存し、形状が同じ（相似形）であれば、寸法に依存しないことを意味する。図 2 に示すように、I ビーム、薄肉円環形状であっても同様である。形状係数が式（1）から分かるように無次元数であるので、形状依存性はあるが寸法依存性がないのは当然である。

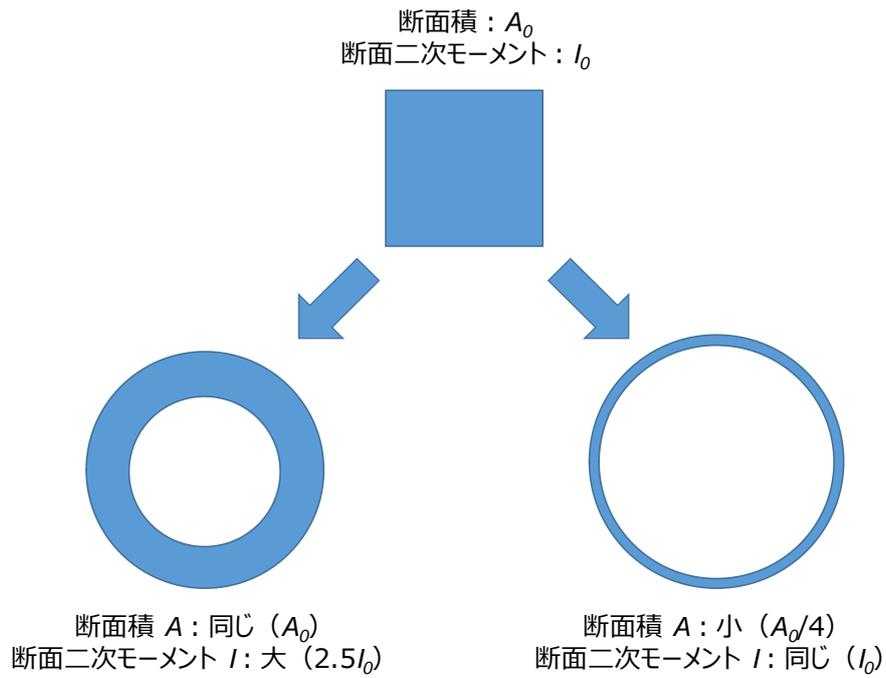


図 1 梁の曲げ剛性に及ぼす断面形状の影響

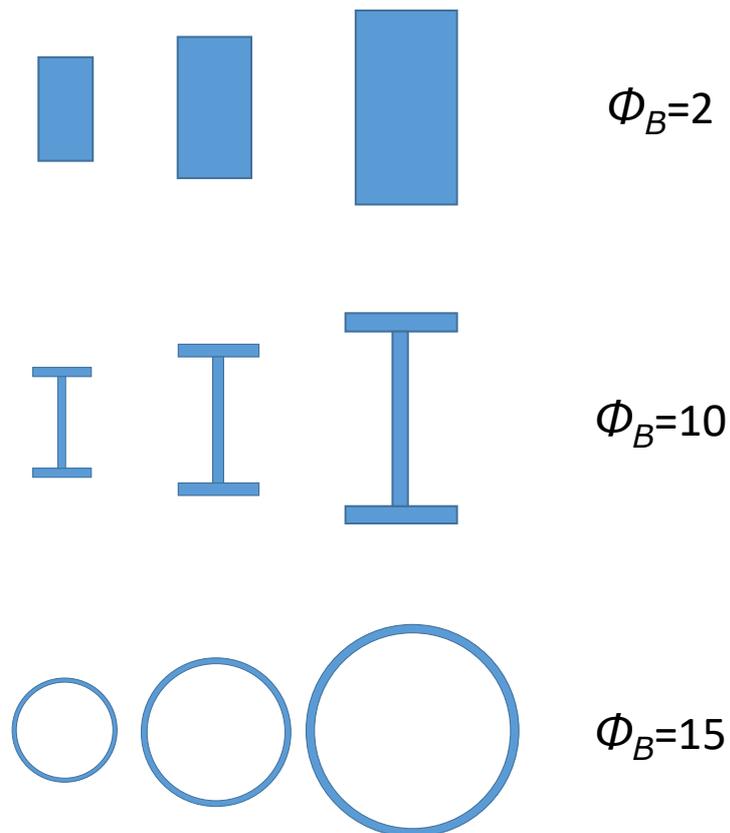


図 2 形状係数の形状依存性、寸法非依存性

### 軸のねじり剛性と形状係数

梁であっても曲げだけでなく、ねじりを受ける場合が少なくない。また、曲げ剛性が十分であってもねじり剛性が不十分であると構造材料としては機能しない。そこで、次に軸のねじり剛性と形状係数について考える。軸のねじり剛性、形状係数も梁の曲げ剛性、形状係数と同様の手順によって導出できる。

軸のねじり剛性は作用するトルクに比例し、ねじれ角に反比例し、その比例定数が  $GK$  となる。ここに、 $G$  は材料の横弾性係数、 $K$  はねじりモーメントである。円形断面の場合にはねじりモーメント  $K$  は断面二次極モーメント  $J$  に等しくなる。断面二次極モーメントは次式で定義できる。

$$J = \int_A r^2 dA \quad (2)$$

ここに、 $dA$  は半径  $r$  の微小リング要素である。断面二次極モーメント  $J$  は断面二次モーメント  $I$  の二倍となる。円形断面でない形状の場合、ねじりモーメント  $K$  は断面二次極モーメント  $J$  よりも小さくなる。

ねじり剛性  $S_T$ 、トルク  $T$ 、ねじれ角  $\theta$ 、ねじりモーメント  $K$ 、横弾性係数  $G$ 、軸の長さ  $L$  には次の関係が成り立つ。

$$S_T = \frac{T}{\theta} = \frac{KG}{L} \quad (3)$$

ねじり剛性に関する形状係数も曲げ剛性と同様に次式で定義する。

$$\Phi_T = \frac{S_T}{S_{T0}} = \frac{K}{K_0} \quad (4)$$

ここに、 $S_{T0}$ 、 $K_0$  は基本形状である矩形断面のねじり剛性、ねじりモーメントである。ここに、添え字の  $T$  はねじり剛性に関することを意味する。矩形断面のねじりモーメントは断面積を  $A$  とすると後述するように

$$K_0 = 0.14 A^2$$

であるので、形状係数は次式で定義できる。

$$\Phi_T = 7.14 \frac{K}{A^2} \quad (5)$$

### 種々の断面形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数

以上の知見をもとに代表的な形状である中実長方形円形形状、薄肉長方形円形形状、I型、H型形状に関して、曲げとねじりのモーメントおよび形状係数について説明する。

(a)中実長方形円形形状

表 1 に中実長方形円形形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数を示す。長方形断面の曲げモーメント（断面二次モーメント）は次式より導出できる。

$$I = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

円形断面のねじりモーメントは断面二次極モーメントに等しいので次式より導出できる。

$$J = \int_0^r r^2 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} r^4$$

長方形断面の曲げ形状係数は基本形状を一辺  $b_0$  の矩形形状とすると、断面積に関して  $A=bh=b_0^2$  の関係があることより、次式より導出できる。

$$\Phi_B = \frac{S}{S_0} = \frac{EI}{EI_0} = \frac{I}{I_0} = \frac{bh^3}{12} \bigg/ \frac{b_0^4}{12} = \frac{bh^3}{b^2 h^2} = \frac{h}{b}$$

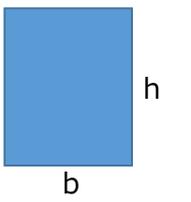
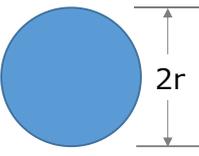
図 2 の上図では  $h=2b$  であるので形状係数は 2 となる。計算上は高さを幅に比べて大きくとればいくらでも大きい曲げ形状係数を得ることができるが、ある値を超えると曲げ変形を維持できなくなり、ねじれ変形（ねじれ座屈）するので実際には限界となる幅に対する高さ比が存在する。

同様に、半径  $r$  の円形断面の曲げ形状係数は、断面積に関して  $A=\pi r^2=b_0^2$  の関係があることより、次式より導出できる。

$$\Phi_B = \frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^4}{4} \bigg/ \frac{b_0^4}{12} = \frac{3\pi r^4}{\pi^2 r^4} = \frac{3}{\pi}$$

一方、円形断面のねじりモーメントは曲げモーメントの二倍であるので  $(\pi/2) r^4$  となり、これを式 (5) に代入し、 $A=\pi r^2$  を考慮するとねじり形状係数は 1.14 となる。非円形断面のねじりモーメント、ねじり形状係数は近似的に表 1 となる。円形断面の場合には同じ量の材料であれば、曲げ形状係数、ねじり形状係数いずれも矩形断面の場合と大差ないことがわかる。従って、矩形断面にするか円形断面にするかは使用条件、製造性によって決めればよい。

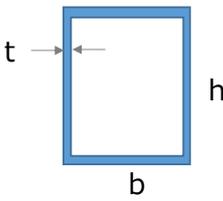
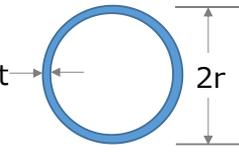
表 1 中実長方形円形形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数

|   | 断面積<br>$A$ | 曲げモーメント<br>$I$     | ねじりモーメント<br>$K$                       | 曲げ形状係数<br>$\Phi_B$      | ねじり形状係数<br>$\Phi_T$                    |
|---|------------|--------------------|---------------------------------------|-------------------------|--|
|  | $bh$       | $\frac{bh^3}{12}$  | $\frac{bh^3}{3}(1 - 0.58\frac{b}{h})$ | $\frac{h}{b}$           | $2.38\frac{h}{b}(1 - 0.58\frac{b}{h})$ |
|  | $\pi r^2$  | $\frac{\pi}{4}r^4$ | $\frac{\pi}{2}r^4$                    | $\frac{3}{\pi} = 0.955$ | 1.14                                   |

(b) 薄肉長方形円形形状

表 2 に薄肉長方形円形形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数を示す。ここに、肉厚  $t$  は幅  $b$ 、高さ  $h$ 、半径  $r$  に比べて十分に小さいものとする。例えば、薄肉円形形状の場合、曲げ形状係数、ねじり形状係数のいずれも半径と肉厚の比に等しくなる。すなわち、図 2 の下図の例でいうと  $h/t$  がほぼ 15 ということを意味する。

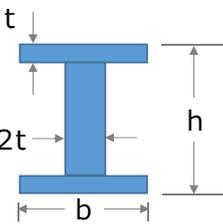
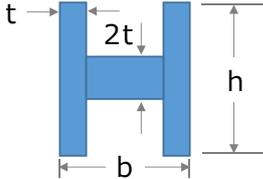
表 2 薄肉長方形円形形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数

|   | 断面積<br>$A$ | 曲げモーメント<br>$I$                      | ねじりモーメント<br>$K$                             | 曲げ形状係数<br>$\Phi_B$   | ねじり形状係数<br>$\Phi_T$  |
|---|------------|-------------------------------------|---|--|--|
|  | $2t(h+b)$  | $\frac{1}{6}h^3t(1 + 3\frac{b}{h})$ | $\frac{2tb^2h^2}{(h+b)}(1 - \frac{t}{h})^4$ | $\frac{1}{2} \frac{h}{t} \frac{(1 + \frac{3b}{h})}{(1 + \frac{b}{h})^2}$ | $\frac{3.57b^2(1 - \frac{t}{h})^4}{th(1 + \frac{b}{h})^3}$ |
|  | $2\pi r t$ | $\pi r^3 t$                         | $2\pi r^3 t$                                | $\frac{3}{\pi} \frac{r}{t}$  | $1.14 \frac{r}{t}$   |

(c) I 型、H 型形状

表 3 に I 型、H 型形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数を示す。ここに、肉厚  $t$  は幅  $b$ 、高さ  $h$  に比べて十分に小さいものとする。例えば、図 2 の I ビームの例でいうと、曲げ形状係数を 10 にするためには高さ  $h$  が幅  $b$  の二倍とすると  $h/t$  が約 18 となる。幅と高さが等しい場合 ( $b=h$ ) にはねじりモーメント、ねじり形状係数は I 型、H 型形状いずれも同じ値となる。従って、I 型にするか H 型にするかは主に曲げ剛性を考慮して決めることになる。また、I 型、H 型形状は高い形状係数をとることができるが、曲げ変形とねじり変形が連成し易い（曲げるとねじれる）ので、構造設計に際しては使用条件を考慮した細心の注意が必要である。

表 3 I 型、H 型形状の曲げとねじりのモーメント、形状係数

|   | 断面積<br>$A$ | 曲げモーメント<br>$I$                    | ねじりモーメント<br>$K$                   | 曲げ形状係数<br>$\Phi_B$  | ねじり形状係数<br>$\Phi_T$   |
|---|------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---|---|
|   | $2t(h+b)$  | $\frac{1}{6}h^3t(1+3\frac{b}{h})$ | $\frac{2}{3}bt^3(1+4\frac{h}{b})$ | $\frac{1}{2}\frac{h}{t}\frac{(1+\frac{3b}{h})}{(1+\frac{h}{b})^2}$      | $1.19\frac{t}{b}\frac{(1+\frac{4h}{b})}{(1+\frac{b}{h})^2}$ |
|  | $2t(h+b)$  | $\frac{t}{6}(h^3+4bt^2)$          | $\frac{2}{3}ht^3(1+4\frac{b}{h})$ | $\frac{1}{2}\frac{h}{t}\frac{(1+\frac{4bt^2}{h^3})}{(1+\frac{b}{h})^2}$ | $1.19\frac{t}{h}\frac{(1+\frac{4b}{h})}{(1+\frac{b}{h})^2}$ |