

フライホイールとは

フライホイールは物体の回転慣性モーメントを利用する機械要素の一つで、はずみ車もその例である。それ以外にも、回転速度を一定させる目的（自動車）、回転のジャイロモーメントを利用したものがある。ここでは、フライホイールの多様な用途のうち、回転の運動エネルギーを利用した発電を目的としたフライホイールについて考える。図1に発電用フライホイールの構成を示す。回転体、軸受、モータ/発電機から構成される。例えば、深夜電力で回転体を回転させ、運動エネルギーとして蓄電する。そして、昼間に運動エネルギーを発電機で電気に変換する。すなわち、電気エネルギー→運動エネルギー→電気エネルギーのプロセスを踏む。図2に発電用フライホイールの動作を示す。モータ/発電機は蓄電時はモータとして機能し、発電時は発電機として機能する。

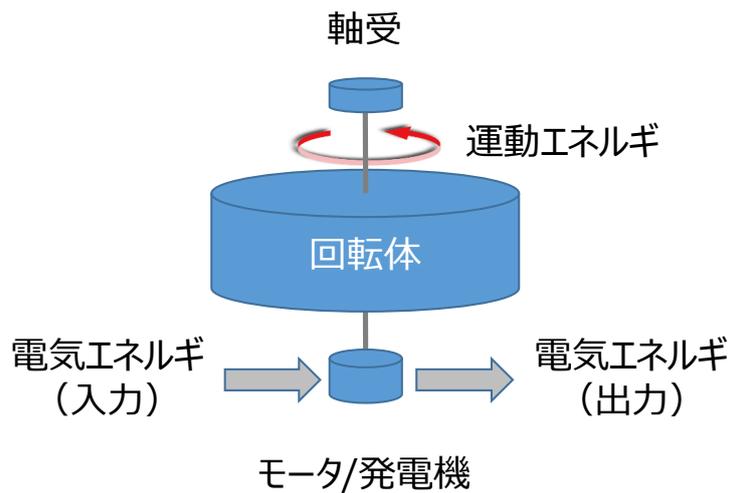


図1 発電用フライホイールの構成

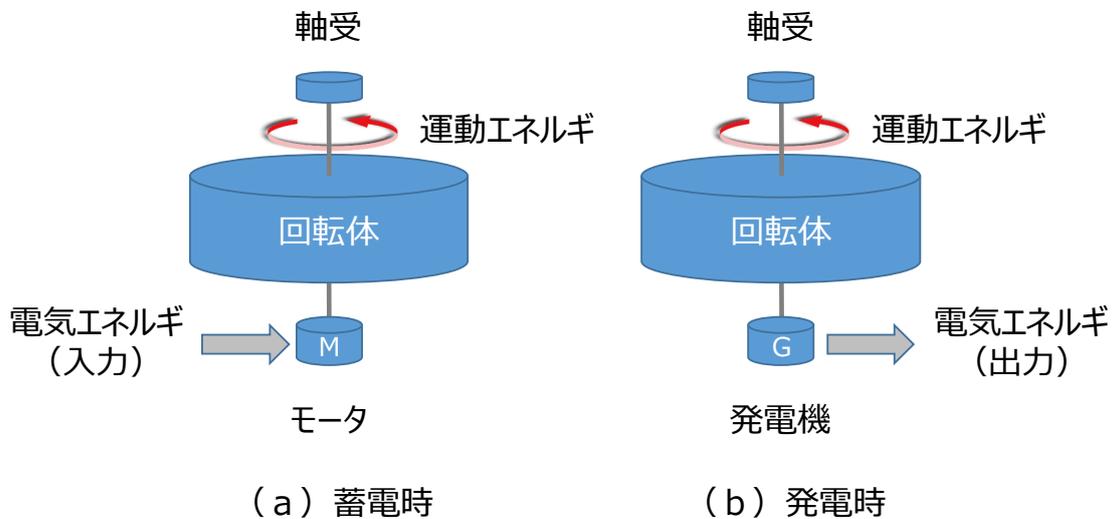


図2 発電用フライホイールの動作

発電用フライホイールでは回転による運動エネルギーをロスなく保存したい。一方、軸受、回転に伴う風損によりロスが発生する。そこで、本格的な発電用フライホイールでは回転体全体を密閉用に入れて内部を真空にすることにより、風損を事実上ゼロにすることもある。軸受についても非接触の磁器軸受を用いることもあるが、回転体自体が相当な重量となるため限界がある。また、発電用フライホイールの最大の懸念は回転による回転体の遠心破壊であり、もちろんこれが起きないように設計するわけであるが、最悪の事態（遠心破壊）に備えて防護壁等の設置が必要となる。これが、発電用フライホイールの構造を大規模にしてしまい、実現性の壁ともなっている。

回転エネルギー

フライホイールでは回転による運動エネルギーを利用している。ここではこの回転エネルギーの導出方法について考える。質量 m の質点が運動している状態を考える。図 3 に示すように速度 v で並進運動しているときの運動エネルギー U は皆さんご存知のように

$$U = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

となる。一方、 O 点を中心に半径 r にある質量 m の質点が回転速度 ω で回転している場合の運動エネルギーは $v=r\omega$ を考慮して

$$U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (2)$$

となる。ここに、 $J=mr^2$ でこの J を慣性モーメント呼ぶ。

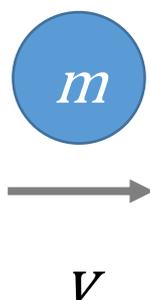


図 3 並進運動

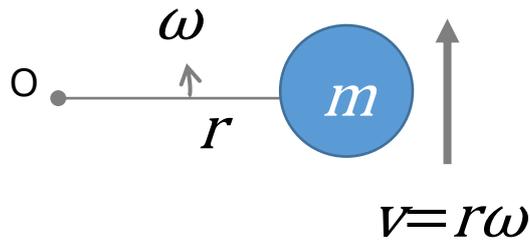


図4 回転運動

以上は質点に関する慣性モーメントであるが、次にある形状を有する回転体（回転軸に関して回転対称）の慣性モーメント求め方について考える。図5に示すように半径 R 、高さ T 、密度 ρ の回転体を考える。この時、回転軸から半径 r にある微小要素の慣性モーメントは $J = \rho \, d\theta \, dr \, dt \, r^2$ となるので回転体全体の慣性モーメントはこれを半径方向、高さ方向、回転方向に積分した次式で表現される。

$$J = \int_0^T \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, dr \, dt \, r^2 = \int_0^T \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r^3 \, d\theta \, dr \, dt \quad (3)$$

これを図5の例に適用すると

$$J = \frac{\pi}{2} \rho T R^4 = \frac{1}{2} M R^2 \quad (4)$$

となる。ここに

$$M = \pi R^2 T \rho$$

でこれは回転体の総質量である。

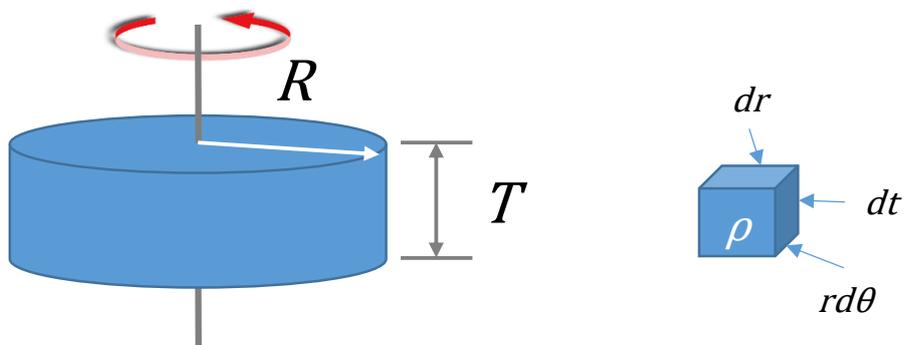


図5 回転体

種々の形状の回転体に関して同様の手順で求めた慣性モーメントを図6に示す。図中の

M は該当回転体の総質量である。

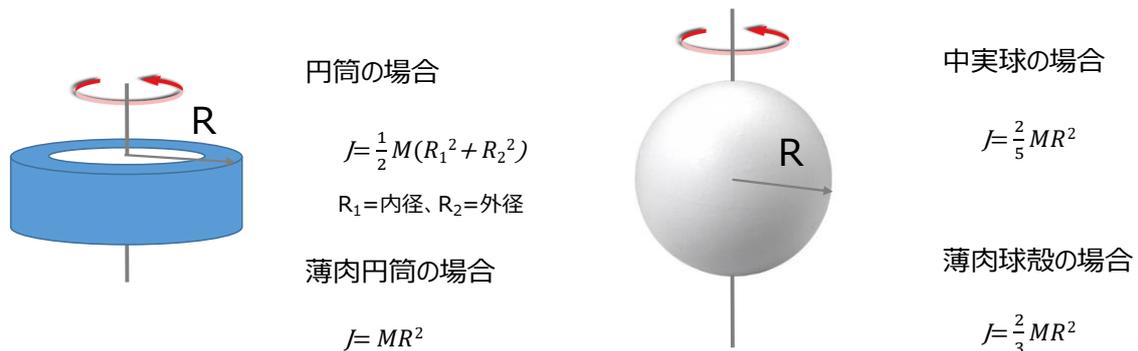


図6 種々の回転体の慣性モーメント

回転時の応力[2]

発電用フライホイールの最大の制約である回転時の応力の導出方法について説明する。これはいわゆる回転円板の遠心力による応力問題である。この導出の手順は非常に煩雑ではあるが最終的には簡単な式で発生応力が表現できるので実際の設計においては非常に有益である。以下、文献[2]の記述に従って説明する。紙面の都合上、詳細部分については省略するので興味ある方は文献を参照されたい。

図7に示すように内径 R_1 、外径 R_2 、密度 ρ の回転体が回転角速度 ω で回っている状態を考える。ここでは簡単のために高さ方向の影響は無視する（高さは外径に比較して十分小さいとする）。半径 r における単位体積当たりの遠心力は $\rho \omega^2 r$ であるので微小要素 $r d\theta$ 、 dr で囲まれた微小扇形要素の半径方向の力の釣り合いを考えると次式が得られる。

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + (\rho \omega^2 r) r d\theta dr = 0 \quad (5)$$

ここに、 σ_r は微小要素に作用する半径方向の応力、 σ_θ は周方向の応力である。

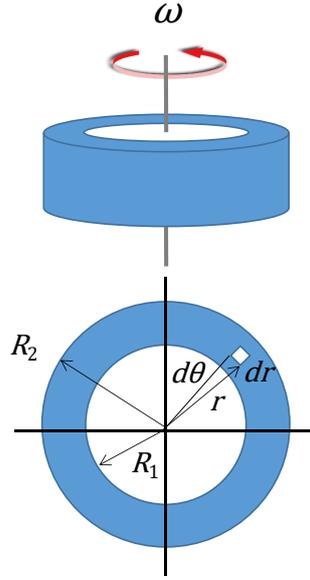


図7 回転円板

式(5)で $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$ として、高次の微小項を省略すると応力に関する次式が得られる。

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (6)$$

一方、円筒殻の応力のひずみの関係式は次式で与えられる。

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \nu \varepsilon_z \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \nu \varepsilon_z \right\}$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_z \right)$$

ここに、 u は半径 r の位置における変位、 ε_z は厚さ方向のひずみである。今、円板は平面応力状態を仮定しているので $\sigma_z = 0$ 、式(7)の第3式にこの条件を代入して、 ε_z について解いて式(7)の第1式、第2式に代入すると次式を得る。

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (8)$$

式(8)を式(6)に代入して

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r = 0 \quad (9)$$

となり、式(9)の表現を変えると

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right\} + \frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r = 0 \quad (10)$$

となる。これを積分して

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur) + \frac{1-\nu^2}{2E} \rho\omega^2 r^2 = C_1$$

この式に r をかけてさらに積分すると

$$ur + \frac{1-\nu^2}{8E} \rho\omega^2 r^4 = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2$$

この式から

$$u = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho\omega^2 r^3 \quad (11)$$

となる。式 (11) を式 (8) に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu) \frac{C_1}{2} - (1-\nu) \frac{C_2}{r^2} - \frac{(1-\nu^2)(3+\nu)}{8E} \rho\omega^2 r^2 \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu) \frac{C_1}{2} + (1-\nu) \frac{C_2}{r^2} - \frac{(1-\nu^2)(3+\nu)}{8E} \rho\omega^2 r^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) の積分定数は円板の内外周で半径応力が存在しない ($r=R_1$ および $r=R_2$ で $\sigma_r=0$) 条件から次式となる。

$$\frac{C_1}{2} = \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{8E} \rho\omega^2 (R_1^2 + R_2^2) \quad C_2 = \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{8E} \rho\omega^2 R_1^2 R_2^2 \quad (13)$$

以上から、応力は式 (12) (13) より次式で表現される。

$$\sigma_r = \rho\omega^2 \frac{3+\nu}{8} R_2^2 \left\{ 1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \right\} \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = \rho\omega^2 \frac{3+\nu}{8} R_2^2 \left\{ 1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \right\} \quad (15)$$

半径応力は $r=R_1$ および $r=R_2$ で $\sigma_r=0$ であり、半径応力の最大発生位置は $d\sigma_r/dr=0$ と置くことにより、 $r=(R_1 R_2)^{1/2}$ の位置で最大となり、

$$(\sigma_r)_{max} = \rho\omega^2 \frac{3+\nu}{8} R_2^2 \left\{ 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right\} \quad (16)$$

円周応力は内周で最大となり、

$$(\sigma_\theta)_{max} = \rho\omega^2 \frac{3+\nu}{4} R_2^2 \left\{ 1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right\} \quad (17)$$

となる。一方、半径 R の円環（リング）の場合は円周応力（フープ応力）のみで式（15）より、

$$\sigma_{\theta} = \rho \omega^2 R \quad (18)$$

となる。

フライホイールの設計問題[1]

以上の知見を元に、図8に示すフライホイールの設計問題を考える。単位質量当たりのエネルギーの最大化を目標とする。ここにフライホイールの回転エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (19)$$

フライホイールの慣性モーメントは

$$J = \frac{\pi}{2} \rho T R^4$$

であるから、式（19）は

$$U = \frac{\pi}{4} \rho R^4 T \omega^2 \quad (20)$$

となる。一方、フライホイールの質量は

$$M = \pi R^2 T \rho \quad (21)$$

ここでは単位質量当たりのエネルギーを最大にしたいので

$$\frac{U}{M} = \frac{1}{4} R^2 \omega^2 \quad (22)$$

が設計指標となる。一方、発生応力は破壊応力 σ_f より小さくしなければならないので式（16）より

$$\sigma_{max} = \rho \omega^2 \frac{3+\nu}{8} R^2 \approx \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 = 2\rho \frac{U}{M} = \sigma_f \quad (23)$$

式（23）を式（22）に代入して

$$\frac{U}{M} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_f}{\rho} \quad (24)$$

従って、単位質量当たりのエネルギーは次の指標

$$M_{ed} = \frac{\sigma_f}{\rho} \quad (25)$$

で決定される。

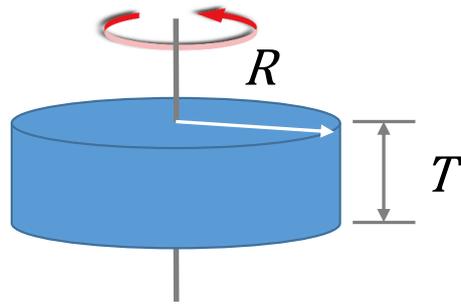


図8 フライホイールの設計問題

フライホイールの設計指標

以上の結果から、指標 M_{ed} が大きいほど、エネルギー密度（単位質量当たりのエネルギー）の大きいフライホイールとなる。図9に発電用フライホイールの設計指標を示す。横軸は密度、縦軸は強度で、指標 M_{ed} を点線で示す。指標は矢印の方向に行くほど大きくなる。この結果より、ここで示した材料のなかでは CFRP が最も指標が大きくて、鉛が最も小さい。直感的には CFRP は軽くて、鉛は重いので逆のように思うが、比強度（指標 M_{ed} がこれに相当）が CFRP が大きく、鉛は小さいということである。ここでは単位質量当たりの強度を設計指標としたが、スペースが問題となる場合には単位体積当たりの強度を設計指標とすればよい。

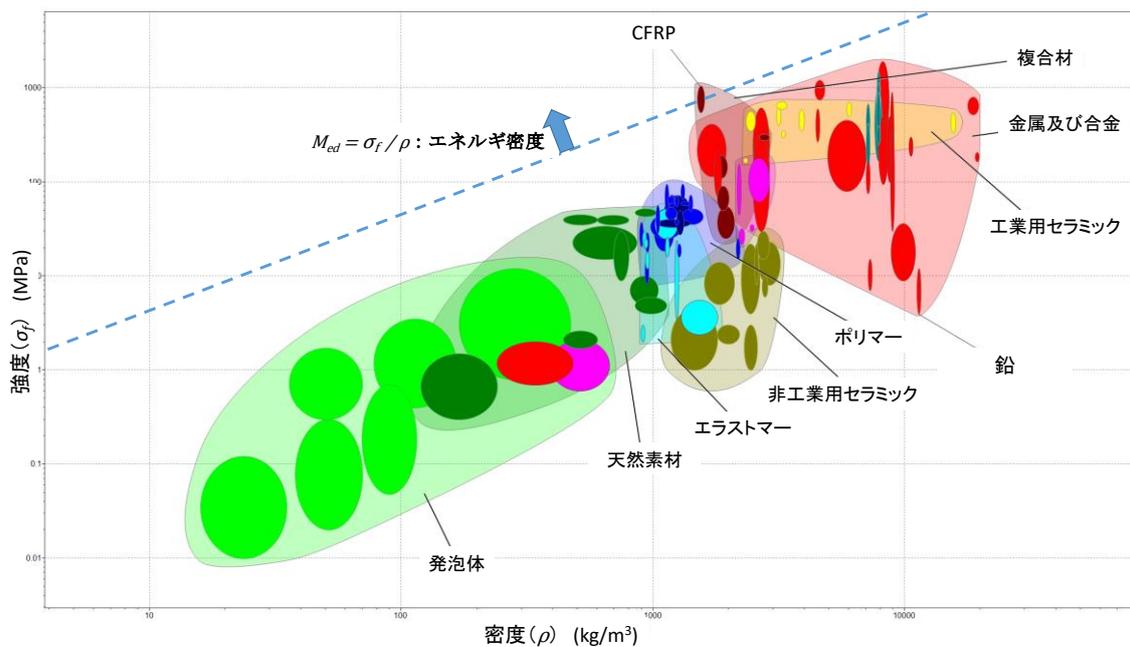


図9 発電用フライホイールの設計指標